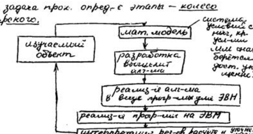
10.02.04 **Численные методы.**

Лекция 1 Ионкин Николай Иванович
каф. выч. методов
экзамен
3–4 переписи ⇒ конст. польз. можно

Реал. задача прох. опред-е этапы – колесо Самарского.



Будем считать, что ММ корректно поставлена (т.е. реш-е ∃ и непр. зав. от нач.у.)
Разраб. выч. алг. – предмет нашего курса

Главы курса:
1. ЧМ лин. алгебры (3)
2. Интерполирование и приближение функций
3. Решение нелинейных ур-й и систем нелинейных ур-й
4. Разностные схемы для уравнений математической физики
5. Решение задачи Коши для ОДУ и систем ОДУ

Автор: Валентина Глазкова
Скан: Валентина Глазкова
Обработка: Валентин Вербовой

Литература.

1. Самарский А.А., Гулин А.В. „Численные методы", М. Наука, 1989г
2. Самарский А.А. „Введение в ЧМ", М. Наука, 1982г
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. „Численные методы", М. Наука, 1987г
4. Калиткин Н.Н. „Численные методы", М. Наука, 1978г
5. Самарский А.А. „Теория разностных схем", М. Наука 1983г
6. Самарский А.А., Николаев Е.С. „Методы решения сеточных уравнений", М. Наука, 1978г

Глава I. Численные методы лин. алгебры.

§1. Введение.

(1) Сист. ЛАУ $Ax=f$
Мы рассм. корр. пост-е задачи (т.е. реш-е единств.), т.е. A – невырождена $\det A=|A|\neq 0$

Пусть A имеет р-р $(m\times m)$
$x=(x_1,x_2,\dots,x_m)^T$, $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)^T$

Часто м-ца A имеет спец. стр-ру (сод-т много нулей).
Поэтому „в лоб" решать нехорош.

При реш-ии сист. (1) исп-ся 2 группы методов:
1. прямые (точные)
2. итерационные (приближённые)

Когда мы говорим точные, мы абстрагир. от ошибок округл-я ЭВМ.
Эти методы позволяют за конеч. число шагов найти реш-е.
Прямые методы:
- Гаусса
- квадр. корня
- ф-лы Крамера

Ф-лы Крамера.
Связаны с вычислением опред.
Сл-но, надо вып-ть порядка $\sim m!$ действий.
В выч. матем-ке ф-лы Кр. не исп-ся.

Метод Гаусса.

Число действий пропорц. m^3
При больших m мет. Г. гораздо экономичнее ф-л Кр.
Этот мет. акт. прим-ся в вычисл. мат-ке (особенно если м-ца полная).
Для спец. видов м-ц исп-ся частн. случаи (ex. мет. прогонки).

Эфф-ть методов (прямых) срав-ся по числу действий:
- умнож-я и
- деления.

Итерационные методы

Для реш-я более сложн. задач ит. мет. м.б. гораздо лучш. прямых.

Мы выбираем в кач-ве нач. приближения некот. вектор x^0 так, чтобы процесс сходился.
Далее строим вычислит. процесс $\{x^n\}$, такой что $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=x$
Близость оценив. по некот-ой норме
$\varepsilon>0$ $\|x^n-x\|<\varepsilon$
При этом сходимость в одной норме не гарантирует сх-ть в другой норме.
Т.о. говоря о сх-ти надо рассм. опред-ю норму.

Как выяснить, когда обрывать итер. проц?
$n_0(\varepsilon)$ – число итераций, необх-х для достиж-я зад. точности ε

Эфф-ть итер методов будем оценивать именно по этой величине. ($n_0(\varepsilon)$ рассчит-ся теор-ки).

Также в этой главе будем изучать пробл. соб. зн-й.
Для м-цы A ищем с.з.:
$Ax=\lambda x$, $x\neq 0$
λ – соб. зн., x – соб. вектор.

С.з. очень важны (от них зависит и уст-ть, и сх-ть)

Различают 2 проблемы:
1. частичн. пробл. с.з. (заключ-ся в нахо-ии min и max по мод. с.з.)
2. полная пробл. с.з. (нах-е всех с.зн.)

Полная пробл. гораздо более слож-я, чем частичная.
Все эти пробл. реш-ся итерац-ми методами.

Мы также решим в этой гл. пробл. нах-я обратной м-цы для невырожд-ой м-цы.
(за m^3 действий).

§2. Связь метода Гаусса с разложением матрицы на множители.

Рассм-ем СЛАУ $Ax=f$ (1)
с невырожд. м-цей A ($\det A\neq 0$) порядка A $(m\times m)$.

Ранее выводилось, что мет. Гаус. требует $\sim\frac{m^3}{3}$ действий.
Оказ-ся удобно в МГ сначала расклад-ть м-цу A на множители спец. вида (факторизация м-цы A):
$A=BC$, (2)
где $B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots\\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mm}\end{pmatrix}$ – нижн. треуг. м-ца

$C=\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1m}\\ 0 & 1 & c_{23} & \cdots & c_{2m}\\ \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ – верхн. треуг. м-ца с 1 на главн. диагонали

Ставим вопрос?
- можно ли м-цу A в таком виде представить (и любую ли).

Получим ф-лу, кот. позволяет нах-ть эл-ты м-ц B и C.
Эл-ты м-цы A имеют вид:
$a_{ij}=\sum\limits_{l=1}^{m} b_{il}c_{lj}$
$a_{ij}=\sum\limits_{l=1}^{l=i-1} b_{il}c_{lj}+b_{ii}c_{ij}+\sum\limits_{l=i+1}^{m} b_{il}c_{lj}$
$b_{il}=0$, если $l>i$ (из вида) $\Rightarrow$ $\sum\limits_{l=i+1}^{m} b_{il}c_{lj}=0$, $\Rightarrow$

$b_{ii}c_{ij}=a_{ij}-\sum\limits_{l=1}^{i-1} b_{il}c_{lj}$
Будем считать, что $b_{ii}\neq 0$
(3) $\Rightarrow \boxed{c_{ij}=\dfrac{a_{ij}-\sum\limits_{l=1}^{i-1} b_{il}c_{lj}}{b_{ii}}}$, $i<j$
Учтём, что C – верхн. треуг-я ⇒
⇒ расписываем Σ по другому
$a_{ij}=\sum\limits_{l=1}^{j-1} b_{il}c_{lj}+b_{ij}\underset{1}{c_{jj}}+\sum\limits_{l=j+1}^{m} b_{il}c_{lj}=0$ (т.к. $c_{lj}=0$, $l>j$)
(4) $\Rightarrow \boxed{b_{ij}=a_{ij}-\sum\limits_{l=1}^{j-1} b_{il}c_{lj}}$, $i\geq j$

Распишем из (3):
$1=c_{11}=\frac{a_{11}}{b_{11}}$, $c_{1j}=\frac{a_{1j}}{b_{11}}$ $\forall j=\overline{2,m}$, т.е. c_{1j} можем найти
Из ф-лы (4) найдём
$b_{j1}=a_{j1}$
$b_{22}=$

Лекция 2 11.02 (2)
Нам надо исп-ть факторизацию $A=BC$ для реш-я сист. лин. ал. ур-й методом Гаусса.

Это удобно, когда мы решаем много систем с неменяющ-ся матрицами и мен-ся правыми частями.

(1) СЛАУ $Ax=f$
$\det A\neq 0$

Число действий (умн-я и деления) в методе Гаусса.

В рез-те прямого хода мет. Гаусса получаем м-цу
$\begin{pmatrix} 1 & & \tilde{a}_{ij}\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}\tilde{f}_1\\ \vdots\\ \tilde{f}_m\end{pmatrix}$
Число действий, необх. для вып-я этого,
$\frac{m^3-m}{3}$ (для преобр-я м-цы A)
$\frac{m(m+1)}{2}$ (число действ., необх. для преобр-я правых частей)
Обратный ход МГ (нах-е $x_1,\dots,x_m$) требует $\frac{m(m-1)}{2}$ действий

Выясним, какие м-цы можно факторизовать?
(надо было, чтобы $b_{ii}\neq 0$)

Выпишем все угловые миноры матрицы A:
$A_1=a_{11}$; $A_2=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, …
$A_k=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ \cdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{pmatrix}$; $k=\overline{1,m}$

Утв. Пусть все главные угловые миноры м-цы A отличны от 0 (т.е. $|A_i|\neq 0$, $i=\overline{1,m}$)
⇒ факторизация м-цы $A=BC$ возможна единств. образом.

Док-во Запишем
$|A_i|=|B_i|\underset{1}{|C_i|}=\underbrace{b_{11}\cdot b_{22}\cdots b_{i-1,i-1}}_{|A_{i-1}|}b_{ii}$
$\Rightarrow b_{ii}=\frac{|A_i|}{|A_{i-1}|}$, $i=\overline{1,m}$ ⇒ все $b_{ii}\neq 0$
⇒ факт-я возм. единств. образом.

Мы указали достаточное усл-е (если эти усл-я нарушены, это не значит, что разл-е единств. образом невозможно)

• Теперь свяжем факторизацию с методом Гаусса.
$A=BC$ (2)
Применим фак-ю для реш-я сист. $Ax=f$ (1)
Подставим (2) в (1) $BCx=f$
Обозначим $Cx=Y$.
$\Rightarrow \begin{cases}BY=f & (5)\\ Cx=Y & (6)\end{cases}$
Т.о. мы свели исходную сист. к реш-ю двух систем с верхн. и нижн. Δ матрицей.
Это другой удобный подход к реш-ю системы.
из (5) ⇒ $Y=B^{-1}f$
Оценим число действий

Задача Показать, что для вычисления по ф-лам (3), (4) треб-ся $\frac{m^3-m}{3}$ действий.

Распишем систему (5)–(6) покоординатно
(5) $\Rightarrow b_{i1}y_1+b_{i2}y_2+\dots+b_{ii}y_i=f_i$, $i=\overline{1,m}$ (i-ое ур-е)
Считаем, что $b_{ii}\neq 0$ (если все угл. мин. ≠ 0, то это вып-но)
$\Rightarrow \boxed{y_i=\dfrac{f_i-\sum\limits_{l=1}^{i-1} b_{il}y_l}{b_{ii}}}$ (7)

Запишем покоорд-но сист (6)
(8') $x_i+c_{i,i+1}x_{i+1}+\dots+c_{im}x_m=y_i$ (i-ое ур-е), $i=m,m-1,\dots,1$
(8) $\boxed{x_i=y_i-\sum\limits_{l=i+1}^{m} c_{il}x_l}$, $i=m,m-1,\dots,1$

Рассм. сколько умн-ий и дел. в ф-ле (7).
Фиксируем i
надо $(i-1)$ умн-е + 1 деление = i действий
i мен-ся от 1 до m
Число действ. для решение системы (5)
$1+2+\dots+m=\underbrace{\frac{m(m+1)}{2}}$
это равно числу действ. для выч-я пр. частей в прямом ходе МГ

Ф-ла (8)
фиксируем i ⇒ $(m-i)$ действий
Всего $1+2+\dots+m-1=\underbrace{\frac{m(m-1)}{2}}$ (действий)
это равно числу действ обр. хода МГ
⇒ Большая часть действий уходит на факторизацию

В совок-ти для реш-я системы (5)–(6) надо $\underbrace{m^2}$ действий
при больших m это значит <, чем $\frac{m^3-m}{3}$ действий

§3. Обращение матрицы методом Гаусса-Жордана.

Пусть задана м-ца $A(m\times m)$, кот. невырождена ($\det A\neq 0$).
В этом случае для обр-ой к A м-цы вып. рав-во
$A^{-1}A=AA^{-1}=E$
Из алг-ры мы знаем методы обращ-я м-ц.
Метод алг-х дополнений треб-ет $m!$ действий
⇒ при больших m не годится
Обозначим $A^{-1}=X$
⇒ получим матричное уравнение
$AX=E$ (1)
имеет m^2 неизвестных.
МГ требует пропорц. $\frac{m^3}{3}$ действий
⇒ если в лоб решать сист. (1) надо $\sim m^6$ действий
При $m=10^{6-7}$ это нереально.

Для реал. задач надо уметь обращать большие м-цы.
На этой лекции мы обратим матрицу за m^3 действий (это на 3 порядка <!)

Метод Гаусса-Жорд. заключ-ся в сведении сист. (1) к m системам с m неизвестными (m^2 неизв)
Вв. $x^{(j)}=\{x_{1j},x_{2j},\dots,x_{mj}\}^T$
$\delta^{(j)}=\{0,0,0,\dots,0,\underset{j}{1},0,\dots,0\}^T$
⇒ каждую сист. можно записать так
(2) $\underbrace{Ax^{(j)}=\delta^{(j)}}$, $j=\overline{1,m}$
получим m систем с одной и той же м-цей A и разными прав. частями

Подсчитаем число действий, необх. для реш-я m систем вида (2).
Представим $A=BC$ ⇒ {подст. в (2)}
⇒ $B\underbrace{Cx^{(j)}}=\delta^{(j)}$
обозн. $Y^{(j)}$ ⇒ получим систему
(3) $\begin{cases}BY^{(j)}=\delta^{(j)}\\ Cx^{(j)}=Y^{(j)}\end{cases}$ (4), $j=\overline{1,m}$

Факторизовать надо только 1 раз (это хорошо).
На неё надо $\frac{m^3-m}{3}$ действий.
При фикс. j (3)+(4) требует m^2 действий. (выведено в §2)
Т.о., для решения m систем нам надо всего
$\frac{m^3-m}{3}+m^3\sim\frac{4}{3}m^3$ действий
это и есть метод Гаусса-Жордана

Покажем теперь, что если решать эти сист. продуманно, то можно решить за m^3 действий
За счёт чего можно сэкономить?
Экономить на факт-ции нельзя.
Можно экономить при реш-ии (3)–(4)
Ненулевая компонента в j-ой позиции ⇒ предыдущие комп-ты можно не считать
(с 1-ой по $(j-1)$-ую комп-ты вектора $y^{(j)}$ нулевые)
Покажем это.
(3) ⇒ $b_{11}y_1^{(j)}=0 \Rightarrow y_1^{(j)}=0$
$b_{21}y_1^{(j)}+b_{22}y_2^{(j)}=0 \Rightarrow y_2^{(j)}=0$
$b_{j-1,1}y_1^{(j)}+b_{j-1,2}y_2^{(j)}+\dots+b_{j-1,j-1}y_{j-1}^{(j)}=0 \Rightarrow$

Сл-но, все $y_i^{(j)}=0$ $i<j$
Это позволяет не считать в программе эти комп-ты
j-ое ур-е имеет вид
(*) $b_{jj}y_j^{(j)}=1 \Rightarrow y_j^{(j)}=\frac{1}{b_{jj}} \Rightarrow$
⇒ все последующие компоненты с $i>j$ нулевыми не будут
Выпишем все последующие ур-ия (3), начиная с $j+1$
(i-ое ур-е) $b_{ij}y_j^{(j)}+b_{i,j+1}y_{j+1}^{(j)}+\dots+b_{ii}y_i^{(j)}=0$, $i>j$
(считаем $b_{ii}\neq 0$)
(5) $\Rightarrow \boxed{y_i^{(j)}=-\dfrac{\sum\limits_{l=j}^{i-1} b_{il}y_l^{(j)}}{b_{ii}}}$, $i=\overline{j+1,m}$

Посчитаем число действ. необх-ое для реализации ф-лы (5).
i и j фиксируем
Умножений $(i-j)$ + 1 деление = $(i-j+1)$ действий /* $i=\overline{j+1,m}$ */
„Отпустим" i

Число умножений:
$(m-j)+(m-1-j)+\dots+1=\frac{(1+m-j)(m-j)}{2}$
Число делений: 1-о в ф-ле (*) и еще $(m-j)$ в ф-ле (5), т.е. $(m-j+1)$ делений

Т.о., для реализации ф-лы (5) {и (*)} при фикс. j надо
$\frac{2(m-j+1)+(m-j+1)(m-j)}{2}=\frac{(m-j+1)(m-j+2)}{2}$ действий (умн. и дел-ий)
„Отпускаем" индекс j
$\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{(m-j+1)(m-j+2)}{2} \circledequal$ $\sum\limits_{j=1}^{m} j=\frac{m(m+1)}{2}$, $\sum\limits_{j=1}^{m} j^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$
Задача Показать, что это число действий $\circledequal \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$
С ф-лой (3) разобрались полностью, а в (4) ничего сэкономить нельзя
(для неё надо $\frac{m(m-1)}{2}$ действ. при фикс. j
⇒ всего $\frac{m^2(m-1)}{2}$ действий)
Т.о. $\underbrace{\frac{m(m+1)(m+2)}{6}}_{\text{для реализации (4)}}+\underbrace{\frac{m^2(m-1)}{2}}_{\text{для (3)}}+\underbrace{\frac{m^3-m}{3}}_{\text{факторизация}}=$
$=\frac{m(m+1)(m+2)}{6}+\frac{3m^2(m-1)}{6}+\frac{2(m^3-m)}{6}=$
$=\frac{m}{6}\left((m+1)(m+2)+3m(m-1)+2m^2-2\right)=$
$=\frac{m}{6}(m^2+\cancel{3m}+\cancel{2}+3m^2-\cancel{3m}+2m^2-\cancel{2})=m^3$ действий!
Это эффективный метод. (когда м-ца произвольная)

§4. Метод квадратного корня.

Задача: решаем систему
(1) $Ax=f$
с невырожд. м-цей $A(m\times m)$ (т.е. $|A|\neq 0$)
Рассм. эрмитову (самосопряж.) м-цу
$A=A^*$
В ней $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$
Метод кв. корня годится только для систем с эрмитовой матрицей (в реал. задачах они встреча-ются очень часто).

МКК закл. в след-м.
Поставим зад.: факторизовать м-цу A в виде 3-х м-ц
(2) $A=S^*DS$,
где S – верхне Δ м-ца $S=\begin{pmatrix}s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1m}\\ 0 & s_{22} & \cdots & s_{2m}\\ \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & s_{mm}\end{pmatrix}$
⇒ S^* – нижне Δ м-ца (как само-сопряж-ая)
$s_{ii}>0$, $i=\overline{1,m}$
/* если оператор самосопр. и пол. определ, то у него на гл. диаг. полож. числа – утв-е из лин. алг. */
$D=\begin{pmatrix}d_{11} & & 0\\ & d_{22} & \\ 0 & & d_{mm}\end{pmatrix}$, $d_{ii}=\pm 1$ – диаг. м-ца

Чтобы понять мех-м МКК, рассм. м-цу A с веществ. эл-ми 2-го порядка,
$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$
S ищем в виде $S=\begin{pmatrix}s_{11} & s_{12}\\ 0 & s_{22}\end{pmatrix}$ ⇒
⇒ $S^*=\begin{pmatrix}s_{11} & 0\\ s_{12} & s_{22}\end{pmatrix}$
D – диаг. с ±1 на гл. диаг.
Найдём $DS=\begin{pmatrix}d_{11} & 0\\ 0 & d_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_{11} & s_{12}\\ 0 & s_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_{11}s_{11} & d_{11}s_{12}\\ 0 & d_{22}s_{22}\end{pmatrix}$
Теперь рез-т слева умножаем на S^*:
$S^*DS=\begin{pmatrix}s_{11} & 0\\ s_{12} & s_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_{11}s_{11} & d_{11}s_{12}\\ 0 & d_{22}s_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_{11}s_{11}^2 & s_{11}d_{11}s_{12}\\ s_{12}d_{11}s_{11} & s_{12}^2d_{11}+d_{22}s_{22}^2\end{pmatrix}$
Приравняем это к $A=S^*DS$ (они совпадают поэлементно)
$a_{11}=d_{11}s_{11}^2$
$a_{12}=s_{11}d_{11}s_{12}$ – нелинейная система
$a_{22}=s_{12}^2d_{11}+d_{22}s_{22}^2$
Из 1-го ур-ия ⇒ $d_{11}=\operatorname{sign}a_{11}$
В предпол-ии $a_{11}\neq 0$ ⇒ $s_{11}=\sqrt{|a_{11}|}$
Из 2-го ур. нах s_{12} ⇒ $s_{12}=\frac{a_{12}}{s_{11}d_{11}}$
Из 3-го ур-ия ⇒ $s_{22}^2d_{22}=a_{22}-s_{12}^2d_{11}$ ⇒
⇒ $d_{22}=\operatorname{sign}(a_{22}-s_{12}^2d_{11})$
В предп-ии $a_{22}\neq 0$ ⇒ $s_{22}=\sqrt{|a_{22}-s_{12}^2d_{11}|}$
Все эл-ты однозн. найдены
⇒ разл-е $A=S^*DS$ возм. 1 образом.

Лекция 3 17.02.

Общий случай.
Факторизовать матрицу A в виде 3-х матриц:

(2) $A = S^*DS$,

$A = A^*$ $(a_{ij} = \bar{a}_{ji})$ — эрмитова

Найдём эл-ты м-цы $D\cdot S$:

$(DS)_{ij} = \sum_{l=1}^{m} d_{il} s_{lj} = d_{ii} s_{ij}$ — верхнетреуг. матрица

Домножим слева на S^* с элементами $\bar{s}_{ji}$:

$(S^*DS)_{ij} = \sum_{l=1}^{m} \bar{s}_{li} d_{ll} s_{lj} = a_{ij}$; $i,j=\overline{1,m}$

Из этого соотн-я найдём эл-ты матриц S и D.
Распишем эту Σ, разложив на 3 слагаемых:

$\sum_{l=1}^{m} \bar{s}_{li} d_{ll} s_{lj} = \sum_{l=1}^{i-1} \bar{s}_{li} d_{ll} s_{lj} + \bar{s}_{ii} d_{ii} s_{ij} + \underbrace{\sum_{l=i+1}^{m} \bar{s}_{li} d_{ll} s_{lj}}_{=0} = a_{ij}$

Учтём, что $\bar{s}_{li} = 0$, $l>i$ (т.к. она Δ-я) $\Rightarrow = 0$

Перепишем ур-е:

(3) $\bar{s}_{ii} s_{ij} d_{ii} + \sum_{l=1}^{i-1} \bar{s}_{li} d_{ll} s_{lj} = a_{ij}$, $i \le j$

Рассм. отдельно это ур-е при $\underline{i=j}$ (зам., что $s\cdot\bar{s} = |s|^2$)

$|s_{ii}|^2 d_{ii} + \sum_{l=1}^{i-1} |s_{li}|^2 d_{ll} = a_{ii} \Rightarrow$

$\Rightarrow |s_{ii}|^2 d_{ii} = a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} |s_{li}|^2 d_{ll} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{d_{ii} = \mathrm{sign}\,(a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} |s_{li}|^2 d_{ll})}$ $\forall i \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{s_{ii} = \sqrt{|a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} |s_{li}|^2 d_{ll}|}}$ $i=\overline{1,m}$

Из (3) $\Rightarrow \boxed{s_{ij} = (a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} \bar{s}_{li} d_{ll} s_{lj}) / \bar{s}_{ii} d_{ii}}$

Т.о., возможна факторизация эрмитовой м-цы в виде (2), если условие симм. отл. от 0.

Для чего мы это делаем?
Для реш-ия системы $Ax=f$ (эф-но) (1)
$\Rightarrow S^*\underbrace{DSx}_{\text{обозн. } y} = f \Rightarrow$ ур-е расп-ся на два

$$\begin{cases} S^*y = f & (4) \\ DSx = y & (5) \end{cases}$$

Из (4) $\Rightarrow$ нах y по явной ф-ле, т.к. S^* — нижне треуг.

Из (5) $\Rightarrow$ нах x по явн. ф-ле, т.к. DS — верхне Δ

В чём выигрыш?
- по ф-ле (3) нам надо считать половину эл-ов, а не все $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ число умн-ий и делений по порядку $\sim \frac{m^3}{6} + m$ извлечений корня $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ суммарное число действий меньше (*не* на порядки, но $\approx$ в 2 раза) это уже важно
- когда этот метод разраб-ся, существенным был выигрыш с точки зрения расхода ОП.

Прямые методы:
- МГ $\sim \frac{m^3}{3}$ слож-ть
- мет. кв. корня (для эрмитовых матриц)

§5. Итерационные методы. Примеры и канонический вид итерац. методов реш-я СЛАУ.

Зачем нужны итер. мет., если есть дост. эфф. прям. мет., дающие точное решение?

В реал. задачах информация в системе задана не точно, а с определённой точностью из каких-то таблиц.
Тогда мы можем найти реш-е с той же заданной точностью, но быстрее, чем с помощью прямых методов.
Итерац. мет. разраб-ся давно.
Эта обл-ть выч. математики сейчас бурно развив-ся.

Постан. задачи:
есть СЛАУ

(1) $Ax = f$

с невыр. м-цей A $(m\times m)$: $\det A \neq 0$,
$x = (x_1,\dots,x_m)^T$, $f = (f_1,\dots,f_m)^T$

обозн. x_i^n — i-ая коорд. n-ой итерации (ном. ит. — вверху, индекс — внизу).

Суть: мы задаём нач. прибл-е x^0 вектора, явл-ся решением (если процесс мож. расх-ся, то надо выбир. x^0 так, чтобы процесс сх-ся)
Далее начинаем вычислять x^n, $n=1,2,\dots$
Если $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ — точное реш-е, то итерац. процесс наз-ся *сходящимся*.

Надо понимать в какой норме рассм-ся сх-ть (несм. на то, что все нормы в конечномерн. пр-ве эквивал-ны).
↳ Сх-ть в одной норме *не* гарантирует сх-ть в другой норме.

Запишем сист. $Ax=f$ покоординатно — выпишем i-ое ур-е:

$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = f_i$, $i=\overline{1,m}$ (2)

$\Rightarrow$ разб. на 3 слаг-х:

$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j + a_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j = f_i$

если $a_{ii} \neq 0$, то $x_i = \frac{f_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j$ (3)

Примеры итерац-х методов.

Теперь можем „навешивать" итерацию на i-ю коорд.

① *Метод Якоби*

$x_i^{n+1} = \frac{f_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n$, $n=0,1,2,\dots$
x^0 — задано, $i=\overline{1,m}$

Вычисл-е след. ит-ции вычисл-ся с пом-ю простой явной ф-лы ч/з предыдущую итерацию.

Позже увидим, что этот метод сходится очень медленно.

② *Метод Зейделя.*

$x_i^{n+1} = \frac{f_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n$, $n=0,1,\dots$
x^0 — задано

Этот метод более надёжен, хотя сх-ся также медленно.
Вычисл. процесс надо правил. организовать, чтобы избав-ся от неявности:

$x_1^{n+1} = \frac{f_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^{m} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^n$

$x_2^{n+1} = \frac{f_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{n+1} - \sum_{j=3}^{m} \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^n$

$\dots$ $i=\overline{3,m}$ $\dots$

При исслед-ии итерац. процессов, ит. мет. записывают в матричном виде.

М-цу A предст. в виде Σ 3-х матриц: $A = R_1 + D + R_2$, где

$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & 0 \end{pmatrix}_{j<i}$, $D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} \ddots & \\ 0 & & a_{mm} \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}_{j>i}$

$\Rightarrow$ Запишем (3) в матричном виде в предпол-ии $\exists D^{-1}$, т.е. $a_{ii} \neq 0$, $i=\overline{1,m}$

(4) $\to X = D^{-1}f - D^{-1}R_1X - D^{-1}R_2X$

Метод Якоби

$X^{n+1} = D^{-1}f - D^{-1}R_1X^n - D^{-1}R_2X^n$, $n=0,1,\dots$ x^0-зад.

Метод Зейделя

$X^{n+1} = D^{-1}f - D^{-1}R_1X^{n+1} - D^{-1}R_2X^n$

МЯ $Dx^{n+1} + (R_1+R_2)x^n = f$
МЗ $(D+R_1)X^{n+1} + R_2X^n = f$

МЯ $D(X^{n+1}-X^n) + AX^n = f$
МЗ $(D+R_1)(X^{n+1}-X^n) + AX^n = f$

Так математики пришли к *канонической форме записи.*

Введение итерац. пар-ра (нужен для ускорения сходимости)

МЯ $D\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau_{n+1}} + Ax^n = f$; $\tau_{n+1} > 0$, $n=0,1,\dots$

МЗ $(D+R_1)\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau_{n+1}} + Ax^n = f$

Из посл. 2-ух ур-ий $\Rightarrow$, что если ит. мет. сх, то он сх. к реш-ю ур-ия.
Кан. форма записи двухслойного итерац. проц.
(два слоя — по (n) и по (n+1)).
$\exists$ многосл. ит. проц., кот. мы изучать не будем.

О. Кан. фор. зап. двухслойного итер. метода реш-ия сист. $Ax=f$ наз-ся его запись в виде

$B_{n+1}\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau_{n+1}} + Ax^n = f$, (5)

$n=0,1,\dots$; x^0 — задано (нач. прибл-е),
$\tau_{n+1} > 0$ — итерац. параметр,
B_{n+1} такая, что $\exists B_{n+1}^{-1}$ (обратная).
{τ_{n+1} и B_{n+1} вв-ся для ускор-я сх-ти}

Если τ и B от (n) нез., итер. мет. наз-ся *стационарным*.
Мы будем рассм. именно такие методы.

Если $B=E$, то метод наз. *явным*.
Если $B=D$, то мет. также явл-ся явным, но, по опр-ю, он явл. явн., если $B=E$.

Вопросы:
- найти усл-е на м-цу и ит. пар-р, при кот. ит. мет. сх-ся.
- изучение скорости сходимости метода

Мы также будем рассм. *метод простой итерации* (релаксации):

$\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau} + Ax^n = f$, $n=0,1,$ x^0 — задано

Метод Ричардсона.

$\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau_{n+1}} + Ax^n = f$

Здесь сам. опт. набор τ_{n+1} — корни мн-на Чебышева (в эт. сл. он сх-ся очень быстро).

- Теперь рассм. *попеременно-треуг. итер. метод (ПТИМ)*
(он значит. лучше остальных)
Предст. A в виде:
$A = R_1 + R_2$,
где $R_1 = \begin{pmatrix} a_{11}/2 & & 0 \\ & a_{22}/2 \ddots & \\ a_{ij} & & a_{mm}/2 \end{pmatrix}_{j<i}$ нижнетреуг., $R_2 = \begin{pmatrix} a_{11}/2 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{mm}/2 \end{pmatrix}_{j>i}$ верхне треуг.

$\Rightarrow$ ПТИМ запис-ся в след-м виде

$(E+\omega R_1)(E+\omega R_2)\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau} + Ax^n = f$, (6)

где $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, $n=0,1,\dots$, x^0 — задано,
$\omega > 0$, $\tau > 0$ — итер-е параметры

Это один из сам. эфф. итер. методов.

$\Rightarrow$ м-ца B имеет вид: $B = (E+\omega R_1)(E+\omega R_2)$ — неявный метод.
Но мы всё вычисляем по явным формулам.

Сейчас этот метод развился.
(долж-ен на самосопр. м-цу)

Реализация ПТИМ.

Пок., что несмотря на неявность, мы реал-ем его по явным ф-м.

Введём вектора
$(E+\omega R_2)\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau} = w^{n+1}$,
$r^n = f - Ax^n$ — *невязка*
$v^{n+1} = \frac{x^{n+1}-x^n}{\tau}$

$\Rightarrow$ ПТИМ можно перепис. в виде
1) $(E+\omega R_1)w^{n+1} = r^n$ $\Rightarrow$ нах. w^{n+1} шаги
2) $(E+\omega R_2)\cdot v^{n+1} = w^{n+1}$ $\Rightarrow$ нах v^{n+1}
3) $x^{n+1} = x^n + \tau v^{n+1}$

18.02. *Лекция 4.*

§6. Теоремы о сходимости итерационных методов.

Зад. закл. в реш-ии сист.

(1) $Ax = f$

с невыр. м-цей $A (m\times m)$: $\det A \neq 0$
с пом-ю двухсл. стац. итер. метода:

(2) $B\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau} + Ax^n = f$

$n=0,1,\dots,\tau>0$ $\exists B^{-1}$

Мы найдём дост. усл-е сх-ти.
Введём линейное норм-е пр-во.
Док-во будем проводить в 2-х нормах.

Введём нормы.
Рассм. лин. пр-во H: $x = (x_1,\dots,x_m)$
$\dim H = m$ (размерность)
Введём евклидову норму.
$\exists$ x,y — произв-е вектора.
Их скал. произв-е вв. по правилу
$(x,y) = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$

Среднеквадратичная норма
$\|x\| = (x,x)^{1/2} = (\sum_{i=1}^{m} x_i^2)^{1/2}$

Теперь лин. пр-во H нормир-е с этой нормой.

Рассм. теперь *энергетич-ю норму*
$\exists D = D^* > 0$ — полож. опр-й самосопр. оператор.
Введём скалярн. произведение
$(x,y)_D = (Dx,y)$
$\Rightarrow$ энергетич. нор. вект. x в смысле пол. опр. сам. опер. опр-ся след. обр. (она перейдёт в евкл. нор, если $D=E$):

$\|x\|_D = (Dx,x)^{1/2}$

Сх-ть будем изучать в опр-ой норме.

Напомним *алгебр. факты.*

$C>0$ — положит. опр-ый оператор, т.е. $\stackrel{df}{=}$ $\forall x\neq 0$ $\boxed{(Cx,x)>0}$

$C \ge 0$ $\stackrel{df}{=}$ $\forall x$ $(Cx,x) \ge 0$
(мог. быть ненул. вектора, у кот. образ Cx ортогонален к x)

Если H — комплексное, унитарное пр-во, то $C=C^*$ (иначе (Cx,x) — комплексное, и ни о каком знаке не мож. идти речь).

Нер-ва $(Cx,x)>0$ нам мало: нам надо, чтобы оно было отд. от 0 конст-ой

$\exists \underline{C=C^*} \Rightarrow \exists$ ОНБ из с.в. $\Rightarrow \forall$-ой вект. можно разл. по базису
если $C>0$ (ещё) $\Rightarrow$ все с.з. >0 $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\delta>0$: $\boxed{(Cx,x) \ge \delta\|x\|^2}$ (мы отделяемся от нуля) min с.з.

Задача 1 $\exists H$ — веществ., $C>0$ (вообще говоря нет $C=C^*$)
Док-ть, что
$(Cx,x) = (\frac{C+C^*}{2}x, x)$

Что это даст?
Мы можем $\forall$-ой ЛО связать его со своей симм-ой частью.
И соотн-е $(Cx,x) \ge \delta\|x\|^2$ тоже можно примен-ть.

$\exists$ теперь $C=C^*>0 \Rightarrow \exists C^{-1} = (C^{-1})^* > 0$
$\Rightarrow \exists C^{1/2} = (C^{1/2})^* > 0$
$\Rightarrow \exists C^{-1/2} = (C^{-1/2})^* > 0$
(это понад-ся при д-ве теоремы)

Введём погрешность:

(3) $v^n = x^n - x$ — погр-ть на n-ой итерации.

Метод сх-ся означает, что $\|v^n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Из (3) $\Rightarrow x^n = v^n + x \Rightarrow$ {подст. в (2)} $\Rightarrow$ для v получим след. задачу:

(4) $\boxed{B\frac{v^{n+1}-v^n}{\tau} + Av^n = 0}$, $n=0,1,\dots$; $\tau>0$
$v^0 = x^0 - x$

$\Rightarrow$ ур-е для погреш-ти такое же как для самого метода, но однородное.

Теперь можем приступать к изуч-ю сх-ти.
Перепишем этот двухсл. (одношаг-ый) метод в удобном виде:

$\frac{v^{n+1}-v^n}{\tau} + B^{-1}Av^n = 0$

$\Rightarrow v^{n+1} = v^n - \tau B^{-1}Av^n = (E - \tau B^{-1}A)v^n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ выразим v^{n+1} ч/з v^n
(обозн. $S = E - \tau B^{-1}A$)

(5) Т.о., $\boxed{v^{n+1} = Sv^n}$, где $\boxed{S = E - \tau B^{-1}A}$ (6)

М-ца (6) наз-ся *м-цей перехода* от n-ой итер-ции к $(n+1)$-ой.

Всё, что связ. со сх-ю, будет опираться на св-ва м-цы S (спектр её соб. зн-ий)

Теор1. (без док-ва)
Итерац-ый метод (2) решение задачи (1) сх-ся при любом нач. приближении тогда и только тогда, когда все с.з. м-цы S по модулю меньше единицы:
$|\lambda_k^S| < 1$, $k=\overline{1,m}$
(с.зн. в общ. сл. м.б. комплексные и отрицательные $\Rightarrow$ берём по $||$)

Если мы бы научились проверять это нер-во, то сх-ть док-на, но исслед-ть спектр м-цы S очень сложно.

Д-во Th1 в Бахвалове.
{оператор S долж. быть сжимающим}

Теперь сф. дост-е усл-е — теор. Самарского, кот. будет давать легко проверяемое условие.

Зам. С этого момента будем рассм. *веществ.* пр-во H.

Теор2 (Самарского; о дост-м усл-ии сх-ти двухсл. итер. метода)

Пусть оператор A — самосопр., положительно опред-ый $(A=A^*>0)$ и пусть выполнено операторное нер-во $\boxed{B - 0{,}5\tau A > 0}$ $(\tau>0)$ (7)
Тогда итерац-ый метод (2) решение зад (1) сх-ся при любом нач. приближении в среднеквадратичной норме, т.е.
$\forall x^0$ $\|x^n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.е.

$\|x^n - x\| = (\sum_{i=1}^{m}(x_i^n - x_i)^2)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Зам. Ограничение $A=A^*>0$ не сильно ограничивает класс реал. практических задач.

Док-во.

① Введём в рассм-е числ. посл. вида
$J_n = (Av^n, v^n)$ (невозр.)
и пок., что эта ЧП — *моном.* и *огр-а*, сл-но, будет *иметь предел.*

Огр-ть снизу есть (нулём).
Пок, что она невозр.

$J_{n+1} = (Av^{n+1}, v^{n+1}) \stackrel{(5)}{=} (ASv^n, Sv^n) \stackrel{(6)}{=}$
$= (A(E-\tau B^{-1}A)v^n, (E-\tau B^{-1}A)v^n) =$
$=$ {распишем, исп-я аксиомы скал. произв. в вещ. пр-ве} $=$
$= ((A - \tau AB^{-1}A)v^n, (E-\tau B^{-1}A)v^n) =$ {дистр-ть} $=$
$= \underbrace{(Av^n, v^n)}_{J_n} - \tau(AB^{-1}Av^n, v^n) - \tau(Av^n, B^{-1}Av^n) +$
$+ \tau^2(AB^{-1}Av^n, B^{-1}Av^n) \ominus$ {$(B^{-1}Av^n, Av^n)$ — эти слаг-е одинак-е} (A-самосопр.)
$\ominus J_n - 2\tau(B^{-1}Av^n, Av^n) + \tau^2(AB^{-1}Av^n, B^{-1}Av^n) =$
$=$ {поменяем местами и снова исп-ем дистр-ть}
$= J_n - 2\tau[((B - \frac{1}{2}\tau A)B^{-1}Av^n, B^{-1}Av^n)]$ >0 (по усл.) ≥ 0 (т.к v^n м.б. $=0$)
{$-2\tau((Av^n - \frac{1}{2}\tau(AB^{-1}A)v^n), B^{-1}Av^n)$}

$\Rightarrow J_{n+1} \le J_n$ (невозр.)
и огр-а $J_n = (Av^n, v^n) \ge 0$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} J_n = J$

② {перенесём J_n влево и поделим на τ} $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ получим осн. энерг. тожд-во

$\frac{J_{n+1}-J_n}{\tau} + 2[\underbrace{(B - 0{,}5\tau A)}_{C>0}B^{-1}Av^n, B^{-1}Av^n] = 0$
(C — не самосопр.)

Зам. Если $C>0$, д-ть, что $\exists\delta>0$:
$(Cx,x) \ge \delta\|x\|^2 = \delta(x,x)$
(задача2)

По усл-ю теоремы (учит. задачу) $\exists\delta>0$:
$((B - \frac{1}{2}\tau A)B^{-1}Av^n, B^{-1}Av^n) \ge \delta\|B^{-1}Av^n\|^2 \ge 0$
(мы отделимся от нуля;
оператор $(B - \frac{1}{2}\tau A) > 0$ (не самосопр.))

③ Переходим к пределу $n\to\infty$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|B^{-1}Av^n\| = 0$ (т.к. $J_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} J$, $J_n \xrightarrow[n\to\infty]{} J$)
Введём вектор $w^n = B^{-1}Av^n$ $\Rightarrow$ {A и B — обратимы}
$\Rightarrow Bw^n = Av^n \Rightarrow v^n = A^{-1}Bw^n \Rightarrow$
$\Rightarrow$ {нер-во Коши-Буняковского} $\Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \le \|v^n\| \le \underbrace{\|A^{-1}B\|}_{\text{не зависит от } n}\cdot\underbrace{\|w^n\|}_{\to 0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|v^n\| = 0$, ч.т.д.

Зам. нач. прибл-е при д-ве любое.

Теперь применим эту теорему.

След. (из теор. Сам.)

- *Метод Якоби* — имеет вид
$D(x^{n+1}-x^n) + Ax^n = f$
Сопост-е с (2) $\Rightarrow B = D$, $\tau = 1$

След.1 $\exists A=A^*>0$ (самосопр, пол. опр-й),
$\exists$ вып. матричное (опер-е) нер-во:
$2D > A$
$\Rightarrow$ метод Якоби сходится при любом нач. прибл-ии в ср.кв. нор.

Док-во По т. Сам., если $(B - 0{,}5\tau A) > 0$, то ит. мет. сх. при $\forall x^0$.
Вып. $D - 0{,}5A > 0$, т.к. $2D > A$.

Задача3 $A=A^*>0 \Rightarrow a_{ii}>0$, $i=\overline{1,m}$

$\exists \{e_k\}$-ОНБ $\Rightarrow (x,y)$ в нём $= \sum x_i y_i$ (эл-ты на главн. диаг.)
$\Rightarrow (Ae_i, e_i) = a_{ii} > 0$, т.к. $A>0$ ч.т.д.

След2. Пусть матрица A обладает строчным диаг-м преобладанием,
т.е.

(8) $a_{ii} > \sum_{j=1, i\neq j}^{m} |a_{ij}|$, $i=\overline{1,m}$ (эл-т на гл. диаг. $>$ чем Σ всех ост. эл-ов в строке)

Пусть м-ца A также самосопр. и пол. опред-а $(A=A^*>0)$
Тогда метод Якоби сх-ся при любом нач. прибл-ии в среднекв. норме.

Зам Это дост. усл-е (диаг. преобл-е) легко проверить.

Док-во Рассм. квадр. форму
$(Ax,x) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_i x_j$
Поработаем с этим скал. произв-ем (сделаем оценки)
Преобр. её так, чтобы пок-ть, что $2D > A$

$(Ax,x) \le \sum_{i,j=1}^{m}|a_{ij}||x_i||x_j| \le \{ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)\} \le$

$\le \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}|a_{ij}||x_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}|a_{ij}||x_j|^2 \ominus \{a_{ij} = a_{ji}$, т.к. A-симм$\}$

$\ominus \sum_{i,j=1}^{m}|a_{ij}||x_i|^2 = \sum_{i=1}^{m}(a_{ii} + \sum_{j=1, i\neq j}^{m}|a_{ij}|)x_i^2 \oslash$ (модуль опустили (зад3))

Из (8) $\Rightarrow 2a_{ii} > \sum_{j=1, i\neq j}^{m}|a_{ij}| + a_{ii}$

$\oslash \sum_{i=1}^{m} 2a_{ii}x_i^2 = (2Dx,x)$ {D — диагональ a_{ii}, x — вектор}

$\Rightarrow 2D > A \Rightarrow$ {след.1} $\Rightarrow$ метод Якоби сх-ся.

След3. Пусть $A=A^*>0$
$\Rightarrow$ метод Зейделя сх-ся при любом нач. прибл-ии x^0 в среднеквадр. норме.

Док-во $(D+R_1)(x^{n+1}-x^n) + Ax^n = f$
$B = D + R_1$ (нижн.Δ), $\tau = 1$ (сравн-я с (2))
усл-е $B - \frac{1}{2}\tau A > 0$
$D + R_1 > \frac{1}{2}(R_1 + D + R_2)$
$\frac{D}{2} + \frac{R_1}{2} - \frac{R_2}{2} > 0$, т.е. $D + R_1 - R_2 > 0$
$\Rightarrow ((D+R_1-R_2)x,x) > 0$ (должно быть),
т.е. $(Dx,x) + (R_1x,x) - (R_2x,x) > 0$
$\Rightarrow \{(R_1x,x) = (x,R_1^*x) = (x,R_2x)\}$ (верхн.Δ) $\Rightarrow$ {посл 2 слаг. сокр-ся}
$\Rightarrow (Dx,x) > 0 \Rightarrow D > 0$.
(т.к. $a_{ii}>0$)

25.02. *Лекция 5.*

Метод простой итерации
$\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau} + Ax^n = f$

След4. $\exists A=A^*>0$, $\gamma_2 = \max_{1\le k\le m}\lambda_k^A$ (max с.з. м-цы A).
Если выбрать τ:

(9) $\boxed{0 < \tau < \frac{2}{\gamma_2}}$

$\Rightarrow$ Метод прост. ит. сх-ся при $\forall$ нач. прибл-ии x^0 в среднеквадр. норме.

Зам. γ_2 — всегда полож. число ($||$ не пишем)

Док-во дост. усл-е $B - 0{,}5\tau A > 0$
$B = E \Rightarrow E - 0{,}5\tau A > 0$ (надо это д-ть)
$\Rightarrow$ должно быть: $1 - 0{,}5\tau\lambda_k^A > 0$ $\forall k$, где λ_k^A — с.з. м-цы A
$\Rightarrow$ должно вып-ся и для γ_2: $1 - 0{,}5\tau\gamma_2 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \underbrace{0 < \tau < \frac{2}{\gamma_2}}_{\text{из итер. метода}}$ (это вып-но)
$\Rightarrow$ по т. Сам. ит. мет. сх. при $\forall$ нач. прибл. ■

§7. Оценка скорости сходимости итерационных методов.

Будем искать усл-я, когда ИМ сх-ся наиб. быстро.

Решаем СЛАУ

$Ax = f$ (1)

с невыр. м-цей $|A| \neq 0$ $(A - m\times m)$
Применим для реш-я (1) двухсл. стац. ИМ:

$B\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau} + Ax^n = f$ (2)

$\tau > 0$, $n=0,1,\dots$, x^0 — задано

Вектор погр-ти на n-й итер-ции $v^n \stackrel{df}{=} x^n - x$
$\Rightarrow$ для него вып-но

$B\frac{v^{n+1}-v^n}{\tau} + Ax^n = 0$ (3)

$n=0,1,\dots$; $\tau>0$; $v^0 = x^0 - x$.

Попытаемся получить оценки вида

$\|v^{n+1}\| \le \rho\|v^n\|$, (4)

$n=0,1,\dots$, $0 < \rho < 1$

Оценим погр-ть на n-й ит. ч/з v^0:

$\|v^n\| \le \rho^n\|v^0\|$ (исп-я (4) как рек. соотн-е) (5)

$\Rightarrow \|v^n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Т.е. оценки вида (4) означают сх-ть.
Но нам надо понять, когда она более быстрая
Если $\rho\to 0$, то сх-ть более быстрая, если $\rho\to 1$, то сх. медленная.
Т.е. ρ — регулятор скорости сх-ти при выборе метода.

Из оц. (4) можно уже указать кол-во итераций, необх. для достиж-я точности ε:

Точность результата ε означает нер-во
$\|x^n - x\| \le \varepsilon \|x^0 - x\|$

Сопоставим это нер-во с (5) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \rho^n \le \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\frac{1}{\rho}\right)^n \ge \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ {прологарифмируем} $\Rightarrow$
$\Rightarrow n \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \ge \ln\frac{1}{\varepsilon}$.

Мы указываем число
(6) $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{\ln 1/\varepsilon}{\ln 1/\rho}\right]$ такое, что
$\Rightarrow$ при $n \ge n_0(\varepsilon)$ зад. (1) будет решена с точн-ю ε.

Чем < итерац. надо совершить для достиж. опред. точн., тем ит. мет. лучше.
Число $\ln\frac{1}{\rho}$ наз. скоростью сх-ти итер. метода.
Когда скор. сх — наиб., число итераций $n_0(\varepsilon)$ — наименьшее.

Пусть H — линейное пр-во: $\dim H = m$.
Введём скал. произв-е в ОНБ:
$\forall x, y \in H \quad (x,y) = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$
Сделаем это пр-во норм-м — введём норму (среднекв.):
$\|x\| = (x,x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)^{1/2}$
$\exists C = C^* > 0 \Rightarrow \forall x, y$ можно ввести скал. произв. (Cx, y)
$\Rightarrow \|x\|_C = (Cx, x)^{1/2}$ — энергетич. норма, порожд. ЛО C.
/* когда $C = E \Rightarrow$ эта норма перех. в среднекв. */
Факт из алгебры:
Если $C = C^* > 0 \Rightarrow C$ — нормальный ЛО $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ у него есть ОНБ $e_1, \dots, e_m$ из собств. векторов.

$\Rightarrow \forall x \in H$ можно однозн. разложить по этому базису
$x = \sum_{k=1}^{m} c_k e_k$
В этом простр-ве справедливо рав-во Парсеваля: $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{m} c_k^2$,
c_k — коэф-т Фурье разложения по ОНБ.

Теор1 (об оценке скорости сх-ти ит. мет-ов)
Пусть $A = A^* > 0$, H — вещественное пр-во;
$B = B^* > 0$,
$\exists$ существует число ρ: $0 < \rho < 1$, такое что выполнено операторное нер-во
(7) $\boxed{\frac{1-\rho}{\tau} B \le A \le \frac{1+\rho}{\tau} B}$
$\Rightarrow$ для решения задачи (3) имеет место оценка
(8) $\boxed{\|v^{n+1}\|_B \le \rho \|v^n\|_B}$ /* $\|\ \|_B$ — энергетич. норма, порожд. оператором B */
$n = 0, 1, \dots$
/* мы сужаем класс операторов B по сравн. с Th. Сам.: $B = B^* > 0$ */

Док-во
Пок. сначала, что при вып-ии усл-ий (7) сх-ть имеет место:
$A < \frac{2}{\tau} B \Rightarrow B - 0{,}5\tau A > 0 \Rightarrow$ по Th. Сам. имеем сх-ть
(т.к. $\rho < 1$)
Док-во сост. из 2-ух частей:
- перепишем (3) и пок., что м-ца перех. от n-й ит. к n+1: все её с.з. по модулю $\le \rho$
- исп-я рав-во Парсеваля, получим оценку (8)

1. Перепишем зад., учитывая что
$\exists B^{1/2} = (B^{1/2})^* > 0$; $B^{-1/2} = (B^{-1/2})^* > 0$ (это следует из $B = B^* > 0$)
К ур-ю (3) слева применим оператор $B^{-1/2} \Rightarrow$
$\Rightarrow B^{1/2}\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} + B^{-1/2} A v^n = 0$
Введём вектор $z^n \stackrel{df}{=} B^{1/2} v^n \Rightarrow$
$\Rightarrow$ это ур-е можно записать так
$\frac{z^{n+1} - z^n}{\tau} + B^{-1/2} A B^{-1/2} z^n = 0$
Разрешим задачу относ-но z^{n+1}:
$z^{n+1} = z^n - \tau B^{-1/2} A B^{-1/2} z^n = (E - \tau B^{-1/2} A B^{-1/2}) z^n$
(9) Обозн. $S \stackrel{df}{=} E - \tau B^{-1/2} A B^{-1/2}$ — матрица перехода от n-й ит-ции к (n+1)-ой.

Будем изучать спектр (с.з-е) м-цы S и пок., что все её с.з. по модулю не превосх. ρ.
Пок., что $S = S^*$ (самосопряж.)
$S^* = (E - \tau B^{-1/2} A B^{-1/2})^* = E^* - \tau (B^{-1/2})^* A^* (B^{-1/2})^* =$
$= E - \tau B^{-1/2} A B^{-1/2} = S$

Запишем зад. на с.зн-ие для м-цы S:
$Sx = s_k x$, где $x \ne 0$, $k = \overline{1,m}$,
s_k — с.з м-цы S, x — с.вектор.

Перепишем эту зад. в виде:
$(E - \tau B^{-1/2} A B^{-1/2}) x = s_k x$, $k = \overline{1,m}$
// домножим слева на невырожд. опр $B^{1/2}$
$(B^{1/2} - \tau A B^{-1/2}) x = s_k B^{1/2} x$
Обозн. $y = B^{-1/2} x \Rightarrow x = B^{1/2} y$ (подставим)
$\Rightarrow (B - \tau A) y = s_k B y \Rightarrow B(1 - s_k) y = \tau A y \Rightarrow$

$\stackrel{\tau \ne 0}{\Rightarrow} (1 - s_k) B y = \tau A y \Rightarrow A y = \frac{1 - s_k}{\tau} B y \Rightarrow$
$\Rightarrow$ {умн. посл. рав-во скалярно на $y \ne 0$}
$\Rightarrow (Ay, y) = \frac{1 - s_k}{\tau}(By, y) \stackrel{(7)}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow \frac{1-\rho}{\tau}(By, y) \le (Ay, y) = \frac{1 - s_k}{\tau}(By, y) \le \frac{1+\rho}{\tau}(By, y)$
{$(By, y) > 0$, т.к. $y \ne 0$ & $(By, y) = (B^{1/2} y, B^{1/2} y) = (x, x) > 0$}
$\Rightarrow$ {сократ-м на (By, y)} $\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1-\rho}{\tau} \le \frac{1 - s_k}{\tau} \le \frac{1+\rho}{\tau} \Rightarrow -\rho \le s_k \le \rho \Rightarrow$
$\Rightarrow |s_k| \le \rho$, $k = \overline{1,m}$ (**)

2. $z^{n+1} = S z^n$ — имеем
(*) $\Rightarrow \|z^{n+1}\| \le \rho \|z^n\|$ (док-м это)
/* по опр. $z^n = B^{1/2} v^n \Rightarrow (z^n, z^n) = \|z^n\|^2 = (B^{1/2} v^n, B^{1/2} v^n) =$
$= (B v^n, v^n) = \|v^n\|_B^2 \Rightarrow$ если вып-но (*), то (8) также вып-но */
Т.к. $S = S^*$, то $\exists$ ОНБ $e_1, e_2, \dots, e_m$ из соб. векторов
$\Rightarrow S e_k = s_k e_k$, $e_k \ne 0$, $k = \overline{1,m}$
Берём z^n и раскл. его по ОНБ из с.в.:
$z^n = \sum_{k=1}^{m} c_k^{(n)} e_k$ { n — номер итерации }
$z^{n+1} = S z^n = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} S e_k = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} s_k e_k$
$\Rightarrow$ {восп. рав-вом Парсеваля $\|z^{n+1}\|^2 = \sum_{k=1}^{m} (c_k^{(n)})^2 s_k^2 \stackrel{(**)}{\le} \rho^2 \sum_{k=1}^{n} (c_k^{(n)})^2 = \rho^2 \|z_n\|^2$ }
$\Rightarrow$ получим оц. (*), из кот. следует оценка (8) в энер. норме B. ■

Рассм. операторное нер-во (7).
Оно проверяется не просто.
Сф. след. (для простоты пров-ки).

След1 Пусть $A = A^* > 0$, $B = B^* > 0$,
$\exists\, \exists$ такие конст. $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$, что
$\boxed{\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B}$
(это будет связ. с max и min с.з.)
$\Rightarrow$ для решения (3) имеет место оценка $\|v^{n+1}\|_B \le \rho \|v^n\|_B$, где
если положить $\tau = \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, то
$\rho = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$, $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ (число обусловленности)
ξ — мал $\Rightarrow \rho \to 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ затух-е слабое.

Док-во
Чтобы прим. Th.1, полагаем
$\gamma_1 = \frac{1-\rho}{\tau}$, $\gamma_2 = \frac{1+\rho}{\tau}$
Пересчитаем ρ: $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{2}{\tau} \Rightarrow \tau$ выбираем как: $\boxed{\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}}$
$\gamma_2 - \gamma_1 = \frac{2\rho}{\tau} = \rho(\gamma_1 + \gamma_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} = \frac{1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}{1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}} = \boxed{\frac{1 - \xi}{1 + \xi}}$, где $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ ■
Следс имеет более информативную форму, чем оценка в Th1.

Зам γ в след1 — это спектр обобщ. зад.
$Ax = \lambda Bx$

Метод простой итер.
$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} + A x^n = f$
След2. Пусть $A = A^* > 0$, $\exists\ \gamma_1 = \min_{1 \le k \le m} \lambda_k^A$,
$\gamma_2 = \max_{1 \le k \le m} \lambda_k^A$
Если τ взять в виде:
$\boxed{\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}}$,
то для реш-ия зад. (3) имеет место оценка
$\|v^{n+1}\| \le \rho \|v^n\|$,
где $\rho = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$, $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$

Док-во {такое же как в след 1, $B = E$}

Факт ρ будет ближе к 0 $\Leftrightarrow \xi \to 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \gamma_1 \to \gamma_2$
Т.е. если γ_1 и γ_2 близки $\Rightarrow$ сх-ть хорошая, если нет — плохая.

02.03. Лекция 6.

§8. Исследование сходимости попеременно треугольного итерац-го метода (ПТИМ).

Решаем сист.
(1) $Ax = f$
$\det A \ne 0$, $A\ (m \times m)$
Общий вид ПТИМ:
(2) $B\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} + A x^n = f$
$\tau > 0$, $n = 0, 1, \dots$, $\exists B^{-1}$
(3) ПТИМ: $B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2)$, где
$R_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & 0{,}5a_{mm} \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5a_{11} & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0{,}5a_{mm} \end{pmatrix}$,
$A = R_1 + R_2$

ПТИМ явл. неявным.
Несмотря на это метод можно реализовать по явным формулам.

ПТИМ на порядок более быстрый, чем остальные. (мы это покажем)
Теоремы: о сх-ти и об оценке скорости сх-ти
Числами τ и ω можно варьировать.

Рассмотрим веществ. м-цу $A = A^* > 0$

Теорема1 (о дост. усл-ях сх-ти ПТИМ)
Пусть $A = A^* > 0$
$\Rightarrow$ если $\boxed{\omega > \frac{\tau}{4}}$, то ПТИМ (2) реш-я сист. (1) сходится в среднеквадратичн. норме при $\forall$ начальном приближении.

Док-во. Оператор B запишем в виде:
$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2) =$
$= (E + \omega R_1 + \omega R_2 + \omega^2 R_1 R_2) = E + \omega A + \omega^2 R_1 R_2 =$
$= \{R_1 = R_2^*\} = E + \omega A + \omega^2 R_2^* R_2$
$\Rightarrow B = (E - \omega R_2^*)(E - \omega R_2) + 2\omega A$

Исследуем такую запись B.
Обозн. $C \stackrel{df}{=} E - \omega R_2 \Rightarrow C^* = E^* - \omega R_2^* = E - \omega R_2^*$
$\Rightarrow C^* C \ge 0$, т.к. $(C^* C x, x) = (Cx, Cx) = \|Cx\|^2 \ge 0$ $\forall x$
(по усл-ю сопряж-е)

Т.о., $B \ge 2\omega A$, т.к. 1-ое слаг. неотриц-е
Вспомним: в теореме Сам. пред-ся
$B - 0{,}5\tau A > 0$, т.е.
$B > 0{,}5\tau A$
$\Rightarrow$ если взять $2\omega > 0{,}5\tau$, т.е. $\omega > \frac{\tau}{4}$, то по Th Сам ПТИМ сх-ся при $\forall$ нач. прибл-ии.

Зам. усл-е $\omega > \frac{\tau}{4}$ пров-ся просто

Нас интересует скорость сходимости

Теорема2 (об оценке скорости сх-ти ПТИМ)
Пусть $A = A^* > 0$, $\exists\, \exists$ константы $\delta > 0$, $\Delta > 0$:
выполнены след. операторные нер-ва:
(4) $\boxed{A \ge \delta E \ ; \ R_2^* R_2 \le \frac{\Delta}{4} A}$
(5) Положим $\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta \Delta}}$, $\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, где
(6) $\gamma_1 = \frac{\sqrt{\delta}}{2}\left(\frac{\sqrt{\delta \cdot \Delta}}{\sqrt{\delta} + \sqrt{\Delta}}\right)$, $\gamma_2 = \frac{\sqrt{\delta \cdot \Delta}}{4}$
$\Rightarrow$ для погреш-ти ПТИМ справедлива оценка
(7) $\boxed{\|x^{n+1} - x\|_B \le \rho \|x^n - x\|_B}$, где
(8) $B = (E + \omega R_2^*)(E + \omega R_2)$, $\rho = \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + 3\sqrt{\eta}}$, $\eta = \frac{\delta}{\Delta}$.

Зам. наличие оценки (7) сх-ть уже обеспечивает (т.к. $\rho < 1$) — сх-ть со скор. геом. прогр. со зн-ем ρ.

Док-во.
- док, что $\delta \le \Delta$

(**) $(4) \stackrel{1}{\Rightarrow} (Ax, x) \ge \delta(Ex, x) = \delta\|x\|^2$
(*) $(4) \stackrel{2}{\Rightarrow} (R_2^* R_2 x, x) = (R_2 x, R_2 x) = \|R_2 x\|^2 \le \frac{\Delta}{4}(Ax, x)$

Зам. чем ближе δ к Δ, тем лучше сходимость (задача хорошо обусловлена)

$\delta\|x\|^2 \stackrel{(**)}{\le} (Ax, x) =$
/* $(Ax, x) = ((R_2^* + R_2)x, x) = (R_2^* x, x) + (R_2 x, x) =$ (т.к. пр-во евклидово)
$= 2(R_2 x, x)$ */
$= \frac{(Ax, x)^2}{(Ax, x)} = \frac{4(R_2 x, x)^2}{(Ax, x)} \le$
/* по нер-ву Коши-Бун.
$(R_2 x, x)^2 \le \|R_2 x\|^2 \|x\|^2$ */
$\le \frac{4\|R_2 x\|^2 \|x\|^2}{(Ax, x)} \stackrel{(*)}{\le} \frac{4 \frac{\Delta}{4}(Ax, x)\|x\|^2}{(Ax, x)} = \Delta \|x\|^2$
$\Rightarrow \boxed{\delta \le \Delta} \Rightarrow 0 < \rho < 1 \Rightarrow$ ПТИМ сх-ся
- будем опираться на след1 Th об оценке скор. сх-ти.
Вспомним.
След1. Если $\exists$ конст γ_1, γ_2:
$\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B$,
то имеет место оц. (7)

Мы показали, что $B \ge 2\omega A$ (в док-ве Th 1) $\Rightarrow$
$\Rightarrow A \le \frac{1}{2\omega} B \Rightarrow \gamma_2 = \frac{1}{2\omega}$ (выбираем)

Найдём γ_1.
$B = E + \omega A + R_2^* R_2 \omega^2 \le$ (вынес. при д-ве Th сх-ти)
$\stackrel{(4)}{\le} \left(\frac{1}{\delta} + \omega\right) A + \omega^2 \frac{\Delta}{4} A = \left(\frac{1}{\delta} + \omega + \omega^2 \frac{\Delta}{4}\right) A$
Выбираем $\gamma_1 = \left(\frac{1}{\delta} + \omega + \omega^2 \frac{\Delta}{4}\right)^{-1}$.

Т.е. конст. γ_1 и γ_2 мы переписали ч/з δ, Δ и ω.

В след1 было:
если выбрать $\tau = \tau(\omega) = \frac{2}{\gamma_1(\omega) + \gamma_2(\omega)}$,
то имеет место оц.
$\|x^{n+1} - x^n\|_B \le \rho(\omega) \|x^n - x\|_B$,
где $\rho(\omega) = \frac{1 - \xi(\omega)}{1 + \xi(\omega)}$, $\xi(\omega) = \frac{\gamma_1(\omega)}{\gamma_2(\omega)}$.
Будем подбирать ω так, чтобы минимизировать ρ.
Если $\xi \to 1$, то $\rho \to 0$

Введём функ-ю $f(\omega) = \frac{\gamma_2(\omega)}{\gamma_1(\omega)}$. При таком ω, при кот-м $f(\omega)$ будет иметь минимум, сх-ть будет самая быстрая
$f(\omega) = \frac{\gamma_2(\omega)}{\gamma_1(\omega)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta\omega} + \omega\frac{\Delta}{4}\right)$ {из найденного вида γ_1 и γ_2}
Будем иссл-ть min этой функц.
$f'(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{4} - \frac{1}{\delta\omega^2}\right) = 0$
$\frac{\Delta}{4} = \frac{1}{\delta\omega^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{4}{\delta\Delta} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}} \Rightarrow$ {в этой т. ω и достигается min}
$\Rightarrow$ такое ω в форм-ке теор. мы и выбираем.
Док, что это min:
$f''(\omega) = \frac{1}{\delta\omega^3} > 0$ — min

выбираем
$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{2}{\gamma_1(\omega) + \gamma_2(\omega)}}$
$\boxed{\gamma_2(\omega) = \frac{\sqrt{\delta\Delta}}{4}}$; $\boxed{\gamma_1(\omega) = \left(\frac{1}{\delta} + \omega + \omega^2\frac{\Delta}{4}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{\delta}}{2}\left(\frac{\sqrt{\delta\Delta}}{\sqrt{\delta} + \sqrt{\Delta}}\right)}$
$\frac{1}{2\omega}$ (подставим ω)
$\rho = \frac{1 - \xi(\omega)}{1 + \xi(\omega)}$, $\xi = \frac{\gamma_1(\omega)}{\gamma_2(\omega)}$,
Пересчитаем ρ и ξ в терминах δ и Δ:
$\xi = \frac{\gamma_1(\omega)}{\gamma_2(\omega)} = \frac{\sqrt{\delta}\sqrt{\delta\Delta} \cdot 4}{2(\sqrt{\delta} + \sqrt{\Delta})\sqrt{\delta\Delta}} = \frac{2\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta} + \sqrt{\Delta}}$
$\boxed{\rho = \frac{1 - \xi(\omega)}{1 + \xi(\omega)} = \frac{1 - \frac{2\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta} + \sqrt{\Delta}}}{1 + \frac{2\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta} + \sqrt{\Delta}}} = \frac{\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta} + 3\sqrt{\delta}} =}$
$= \frac{1 - \sqrt{\frac{\delta}{\Delta}}}{1 + 3\sqrt{\frac{\delta}{\Delta}}} = \boxed{\frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + 3\sqrt{\eta}}}$, где $\boxed{\eta = \frac{\delta}{\Delta}}$ ■

Получим следс., кот. позволит сопоставить ПТИМ по числу итераций с др. ИМ.

Зам η — величина малая
$\eta = O(m^{-2})$, m — порядок матрицы
$n_0(\varepsilon) = \left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\rho}}\right]$
оценим кол-во итераций $n_0(\varepsilon)$ ч/з m.
$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + 3\sqrt{\eta}}{1 - \sqrt{\eta}} \approx (1 + 3\sqrt{\eta})(1 + \sqrt{\eta}) \approx 1 + 4\sqrt{\eta}$
$\Rightarrow \ln\frac{1}{\rho} \approx 4\sqrt{\eta} \Rightarrow n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right) = O(m)$
$\Rightarrow$ число ит-ций ПТИМ $\approx$ порядку решаемой задачи

Оценим сколько итераций необх. в мет. ПИ для достиж-я точн. ε.
МПИ: $\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} + Ax^n = f$
$\rho = \frac{1 - \eta}{1 + \eta}$, $\eta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$; $\eta = O(m^{-2})$
число итераций:
$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \approx 1 + 2\eta$
$\Rightarrow \ln\frac{1}{\rho} \approx 2\eta \Rightarrow \boxed{n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\eta}\right) = O(m^2)}$
$\Rightarrow$ число шагов на порядок >, чем в ПТИМ
Т.о., ПТИМ — один из лучших.

§9. Методы решения задач на собственные значения.

Постановка задачи:
$A\ (m \times m)$ — любая матрица.
Ищем нетрив. реш-ия
(1) $\boxed{Ax = \lambda x}$, $x \ne 0$
λ — собств. значение (с.з.)
x — собств. векторы (с.в)
проблема — реш-е ур-ия (1), где неизвестно и λ, и x.
Зам, что соб. вектор — нетривиален.
Задача (1) опред-на с точн-ю до константы, поэтому с.в. обычно нормируют: $\|x\| = 1$.
С т.з. алг-ры проблем нет:
с.з. — корни хар. мн-на.
С учётом кратности их m штук:
$\boxed{Ae_k = \lambda_k e_k}$, $k = \overline{1,m}$
Хар. мн-н имеет вид:
$\boxed{|A - \lambda E| = 0} = a_m\lambda^m + \dots + a_1\lambda + a_0$
Если A-самосопр., то все с.з. — вещественные.
Решить ур-е m-ой степ. —
$a_m\lambda^m + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$
— это очень сложная задача (при больших m)
При больших m эта задача аналитически не решается — она решается только численно.

ex в МПИ надо оценить наиб и наим. с.з.
$\Downarrow$
проблема с.зн. очень необходимая.

Проблема с.з. делится на две:
1) частичная пробл. с.з.
(заключ. в нах-ии отдельных с.з. — ex max и min по модулю)
2) полная проблема с.з.
(закл-ся в нах-ии всего спектра с.зн-ий)
$\exists$ очень эфф ИМ реш-ия этой зад.
Полная пробл. нах-я с.зн-ий гораздо более сложная.

Степенной метод решения пробл. с.з.

Обозн. x_n — n-я итерация.
Степ. мет. имеет вид:
(2) $x_{n+1} = Ax_n$,
$n = 0, 1, \dots$; A — исх. м-ца,
x_0 — начал. приближение

Все m с. зн-ий имеет не $\forall$ оператор, а только оператор простой стр-ры.
Ex самосопр. опер-р имеет базис из собств. векторов.
Ещё более широкий класс — класс нормальных операторов:
$\boxed{A^*A = AA^*}$
Зам Соб. вектора, отвеч. различ. с.зн-ям, всегда лин. независимы:
$\lambda_i \ne \lambda_j \Rightarrow x_i$ л/н x_j
Если с.зн. кратное, то кол-во л/н с.в. будет $\le$ его кратности.

В дальнейшем будем считать, что оператор имеет базис из собств. векторов.

03.03. Лекция 7.

Все подходы решения част. пробл. с.з. — итерац-е.
Сам. распр. — это степ. метод
$A\ (m \times m)$
(1) $Ax = \lambda x$, $x \ne 0$
(2) $\boxed{x_{n+1} = Ax_n}$, $n = 0, 1, \dots$; x_0 — нач. приближение (должно выб-ся в соотв. с нек. огр-ми)
Сделаем 3 предположения:
A) у опр. A $\exists$ базис из собств. векторов
$e_1, e_2, \dots, e_m = \{e_k\}_1^m$: $Ae_k = \lambda_k e_k$
Занумеруем с.з. в порядке неубывания модуля
$|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \dots \le |\lambda_{m-1}| \le |\lambda_m|$
B) $\left|\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right| < 1$ — однократность с.з.
Разложим нач. прибл-е по базису
$x_0 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_m e_m$
C) $c_m \ne 0$
Зам. Усл. A) вып. для всех норм. операторов.

Теперь в предп-ии усл. A)–C) док., что степ. мет. сх-ся.

Утв. Пусть для м-цы A вып. усл-я A), B), C)
$\Rightarrow$ степ. метод сх-ся по направлению к собств. вектору, отвечающему max по модулю собств. значению:
$x_n \to e_m$

Зам. Можно говорить только о сх-ти по напр-ю — длина опр-ся с точн. до конст-ты.

Док-во. Рассм. ф-лу (2) как рекур. соотн-е:
$x_n = A^n x_0 \ominus$

Зам. Если у A с.з. λ, то у A^n с.з. λ^n

$\ominus$ {разложим x_0 по базису} $= \sum_{k=1}^{m} c_k \lambda_k^n e_k \ominus$ (учит-я, что $Ae_k = \lambda_k e_k$)
$\ominus c_m \lambda_m^n e_m + c_{m-1}\lambda_{m-1}^n e_{m-1} + \dots + c_1\lambda_1^n e_1$

$\Rightarrow$ {учит-я предпол-е C)}
$\frac{x_n}{c_m\lambda_m^n} = e_m + \frac{c_{m-1}}{c_m}\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n e_{m-1} + \dots + \frac{c_1}{c_m}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^n e_1$
{$\lambda_m \ne 0$ в силу B) и т.к. это max по || с.з.}
Устремим $n \to \infty \Rightarrow x_n \to e_m$ (сх-ть по направлению)
т.к. $\left\{\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n \to 0 \ \dots \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^n \to 0\right\}$ (в силу B))

Теперь найдём max по || с.з.
i-ая коорд. n-ой итерации имеет вид:
$x_n^{(i)} = c_1\lambda_1^n e_1^{(i)} + c_2\lambda_2^n e_2^{(i)} + \dots + c_m\lambda_m^n e_m^{(i)}$
$x_{n+1}^{(i)} = c_1\lambda_1^{n+1} e_1^{(i)} + c_2\lambda_2^{n+1} e_2^{(i)} + \dots + c_m\lambda_m^{n+1} e_m^{(i)}$
{поделим $x_{n+1}^{(i)}$ на $x_n^{(i)}$} $\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{x_{n+1}^{(i)}}{x_n^{(i)}} = \frac{c_m\lambda_m^{n+1} e_m^{(i)} + \dots + c_1\lambda_1^{n+1} e_1^{(i)}}{c_m\lambda_m^n e_m^{(i)} + \dots + c_1\lambda_1^n e_1^{(i)}} =$ {$c_m \ne 0$ по предп. C)}
{$\lambda_m \ne 0$} $= \frac{c_m\lambda_m^{n+1} e_m^{(i)}\left(1 + \frac{c_{m-1}}{c_m}\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^{n+1}\left(\frac{e_{m-1}^{(i)}}{e_m^{(i)}}\right) + \dots + \frac{c_1}{c_m}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^{n+1}\left(\frac{e_1^{(i)}}{e_m^{(i)}}\right)\right)}{c_m\lambda_m^n e_m^{(i)}\left(1 + \frac{c_{m-1}}{c_m}\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n\left(\frac{e_{m-1}^{(i)}}{e_m^{(i)}}\right) + \dots + \frac{c_1}{c_m}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^n\left(\frac{e_1^{(i)}}{e_m^{(i)}}\right)\right)}$
$= \lambda_m + O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n$
Т.о., $\lambda_m^{(n,i)} = \frac{x_{n+1}^{(i)}}{x_n^{(i)}} = \lambda_m + O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n \Rightarrow$ мы вычислили max по мод. с.з. с точн. до малой величины
$\lambda_m^{(n,i)}$ — обозн. max по мод. с.з., вычисл-е на n-ой итерации по i-ой координате

Итог: если на м-цу A наложить ограничения A), B), C). {это дост-е усл-я}, то степ. мет. (2) сх-ся при $n \to \infty$ по напр-ю к с.в., отвеч. max по мод. с.з.
Находя отн-е (n+1)-ой ит-ции к n-ой можем найти max по мод. с.з.:
$\lambda_m^{(n)} - \lambda_m = O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n$ ■

Используя степ. метод
{$Ax_n = x_{n+1}$} $\Rightarrow \lambda_m^{(n)} = \frac{(Ax_n, x_n)}{(x_n, x_n)} = \frac{(x_{n+1}, x_n)}{(x_n, x_n)}$ {$x_{n+1} = Ax_n$}
$\lambda_m^{(n)}$ — max по мод. с.з.
Разделим м-цы на 2 класса:
1. A — самосопряж. ($A = A^*$)
(даёт лучшую сх-ть, чем произвольн.)
2. A — произв. опер-р

(1) Вспомним, что если $A = A^*$, то у A есть ОНБ из соб. век-ов:
$\exists e_1, \dots, e_m = \{e_k\}_1^m : (e_i, e_j) = \delta_{ij}$
$x_n = \sum_{k=1}^{m} c_k\lambda_k^n e_k$
$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{m} c_k\lambda_k^{n+1} e_k$ — разложим по ОНБ
max. по мод. с.зн.
$\lambda_m^{(n)} = \frac{(x_{n+1}, x_n)}{(x_n, x_n)} = \frac{c_m^2\lambda_m^{2n+1} + c_{m-1}^2\lambda_{m-1}^{2n+1} + \dots + c_1^2\lambda_1^{2n+1}}{c_m^2\lambda_m^{2n} + c_{m-1}^2\lambda_{m-1}^{2n} + \dots + c_1^2\lambda_1^{2n}} =$ (учит-е, что базис ОН)
$= \left\{\begin{matrix}c_m \ne 0 \\ \text{в силу} \\ \text{предп-ий}\end{matrix}\right\} = \lambda_m \frac{1 + \left(\frac{c_{m-1}}{c_m}\right)^2\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^{2n+1} + \dots + \left(\frac{c_1}{c_m}\right)^2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^{2n+1}}{1 + \left(\frac{c_{m-1}}{c_m}\right)^2\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^{2n} + \dots + \left(\frac{c_1}{c_m}\right)^2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^{2n}}$
$= \lambda_m + O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^{2n}$
$\Rightarrow$ получим оценку для с.з. самосопр м-цы
$\lambda_m^{(n)} - \lambda_m = O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^{2n}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для самосопр. м-цы получим max. по мод с.з. лучшую точность.

(2) Пусть A — произв. м-ца (норм. оп.)
$\Rightarrow \exists \{e_k\}_1^m$ — базис из с.в. м-цы A
Док., что max по mod с.з., получ-е на n-ой итерации будет отличаться от точного на $O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n$
$\lambda_m^{(n)} = \frac{(Ax_n, x_n)}{(x_n, x_n)} = \frac{\sum_{i,j=1}^{m} c_i c_j \lambda_i \lambda_j^n (e_i, e_j)}{\sum_{i,j=1}^{m} c_i c_j \lambda_i^n \lambda_j^n (e_i, e_j)} = \dots$ {выдел-ие старшую степ. $\Rightarrow$ вынесем в числ. в степ. 2n+1, в зн. в ст. 2n}
(задача) $= \lambda_m + O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n$
$\Rightarrow$ получ. оценку
$\lambda_m^{(n)} - \lambda_m = O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n$

Т.о., мы показали, что степ. мет. позволяет находить как max по мод. с.з., так и отвеч. ему с.в.

Зам. Если м-ца веществ., то с.з., вообще говоря, могут быть комплексные.
Утв. Если A — вещ., а с.з. — компл-е, то с.в. — комплексные.

Обозн. $\lambda = \lambda_0 + i\lambda_1$ — с.з.; $\lambda_0, \lambda_1 \in R$ (вещ-е)
$\exists A\mu = \lambda\mu$, $\mu \ne 0$ — с.в.
$\Rightarrow \mu = \mu_0 + i\mu_1$, где μ_0, μ_1 — вещ. век-ра ($\mu_1 \ne 0$)
Док-во. Подставим
$A(\mu_0 + i\mu_1) = (\lambda_0 + i\lambda_1)(\mu_0 + i\mu_1)$
$\Rightarrow$ {разделим действ. и мним-е части}
$A\mu_0 = \lambda_0\mu_0 - \lambda_1\mu_1 \qquad A\mu_1 = \mu_0\lambda_1 + \mu_1\lambda_0$

Пок, что $\mu_1 \neq 0$.
От противного.
$\exists\, \mu_1 = 0$ {зам, что $\lambda_1 \neq 0$}
$\Rightarrow$ из $A\mu_1 = \mu_0\lambda_1 + \mu_1\lambda_0$ следует
$\mu_0 \lambda_1 = \bar{0} \Rightarrow \mu_0 = 0$ (т.к. $\lambda_1 \neq 0$)
$\Rightarrow \mu \equiv 0$ (противоречие) ∎

Перейдём к изучению min по модулю с.з.
Для этого рассм. метод обратных итераций (МОИ).
$\exists\, A\ (m\times m)$
$Ax = \lambda x,\ x \neq 0$

Сделаем теперь допущение, что м-ца A: $\exists A^{-1}$
{если A – вырождена, то min по мод. с.з. $= 0$}
Организуем МОИ по след. правилу

(3) $\boxed{A x_{n+1} = x_n}$, $n = 0,1,\ldots$; x_0 – нач. прибл.

Метод стал неявным.
Разрешим его отн-но x_{n+1}:

(4) $x_{n+1} = A^{-1} x_n$

Имеем степ. метод для A^{-1}

Зам. Из алгебры: $\lambda_k^A = \dfrac{1}{\lambda_k^{A^{-1}}}$
$\Rightarrow$ рассм-ая (4) как степ. мет, получ., что он будет сх-ся по напр-ю к e_1 – соотв. min по || с.з. м-цы A {max по || с.з. м-цы A^{-1}}.

Пусть выполнены усл-я:
A) $\exists$ базис из с.в. $\{e_k\}_1^m$
B) $\left|\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right| < 1 \Rightarrow \left|\dfrac{\lambda_1}{\lambda_m}\right|$ тем более мало
C) $x_0 = c_1 e_1 + \ldots + c_m e_m$ {разл-е x_0 по баз. из с.в.}
Требуем: $c_1 \neq 0$

Покажем, что (4) будет сх-ся по напр-ю к с.в. e_1, соотв. min по || с.з.

Док-во: Использ. рек. ф-лу (4):
$$x_n = (A^{-1})^n x_0 = \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k^{-n} e_k =$$
$$= c_1\lambda_1^{-n} e_1 + \ldots + c_m \lambda_m^{-n} e_m \leftarrow \{\text{исп-ли предп. A)} \Rightarrow \text{разл. } x_0 \text{ по базису}\}$$
{предп. C)}
$$\Rightarrow \frac{\lambda_1^n}{c_1} x_n = e_1 + \frac{c_2}{c_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n e_2 + \ldots + \frac{c_m}{c_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^n e_m$$
{устрем. $n \to \infty \Rightarrow \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n \to 0 \ldots \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^n \to 0$}
$\Rightarrow$ по направлению $x_n \to e_1$ – с.в., отв. min по || с.з. м-цы A

Задача 1 Пок, что
$$\lambda_1^{(n)} = \frac{x_n^{(i)}}{x_{n+1}^{(i)}} = \lambda_1 + O\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n$$
{анал. степ. методу}

Задача 2.
$$\lambda_1^{(n)} = \frac{(x_n, x_n)}{(x_{n+1}, x_n)} = \lambda_1 + O\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n$$
{пок, что λ_1 можно найти ч/з скал. произв.; для самосопр. $\Rightarrow O\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2n}$}

Т.о. Метод обр. ит. позвол. найти min по || с.з. невыр. м-цы.

Степ. мет. позволяет найти и другие с.з. (не только max и min)
Рассм. метод обр. итераций со сдвигом
Он позволяет находить промеж-е с.зн-я.
Его можно записать в виде

$\boxed{(A - \alpha E) x_{n+1} = x_n}$, $n = 0,1,\ldots$, x_0 – зад., $\alpha \in R$ (5)

$\Rightarrow$ это неявная формула $\Rightarrow \exists\ \exists (A - \alpha E)^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow x_{n+1} = (A - \alpha E)^{-1} x_n$ (6)

Обозн-е $B = (A - \alpha E)^{-1}$ снова имеем степ. метод.
Он будет сх-ся к e_ℓ:
$$x_n \to e_\ell,$$
где ℓ – номер: $\dfrac{1}{|\lambda_\ell - \alpha|} = \max\limits_k \dfrac{1}{|\lambda_k - \alpha|}$
(т.е. λ_ℓ – наиб. близкое к α с.з. м-цы A)

Зам. Надо понимать, что $(A - \alpha E)$ близка к вырожд., т.к. заказчик говорит, что искомое с.з. близко к α.
$$\Rightarrow \lambda_\ell^{(n)} = \alpha + \frac{x_n^{(i)}}{x_{n+1}^{(i)}} \quad \{\text{т.к. } (\lambda_\ell - \alpha) - \min \text{ по мод. с.з. м-цы } (A - \lambda E)\}$$

09.03. Лекция 8. Часто при реш-ии задач необх. находить весь спектр с.зн.
Мы будем изучать сам. совр. QR-алгоритм.

§10. Приведение матрицы к верхней почти треугольной форме (ВПТФ).

Зад. на с.з.
(1) $Ax = \lambda x,\ x \neq 0$

Если бы нам удалось свести A к C, где C – имеет предельную форму, то весь спектр легко найти.
$$A \to C$$
{сводить по мет. Гаус. сложно и при этом теряется спектр исх. задачи}

(2) Если $C = Q^{-1}AQ$ – т.е. перейти от A к C с помощью преобр-ий подобия.

Это можно сделать численно (аналит-ки нельзя).

Если мы от A к C перех. с пом. преобр-ий подобия, то спектр с.зн-ий сохр-ся.

Если Q – ортог-я (унит-я) м-ца, то также сохраняется и симметрия.

Наш подход основан на элем. отражениях (Хаус-Холдера).

$\exists\, A\ (m\times m)$
рассм пр-во m-мерн векторов
$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \neq 0$$

Опр. Элем-м отражением, соотв-м данному вект v, наз-ся преобразование, зад-е м-цей

(3) $$H = E - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2}$$

$v^T v = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_m^2 = \|v\|^2$
$$v \cdot v^T = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & \cdots & v_1 v_m \\ v_2 v_1 & v_2^2 & \cdots & v_2 v_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_m v_1 & v_m v_2 & \cdots & v_m^2 \end{pmatrix} \Rightarrow H\ (m\times m)$$
Рассм. св-ва м-цы H:
1) vv^T – симметрична $\Rightarrow$ H – симм-я $\Rightarrow H = H^T$
2) H – ортогональная м-ца
Опр. Q – ор-я м-ца, если $Q^T = Q^{-1}$
Опр Q – унитарна, если $Q^* = Q^{-1}$ (аналог в компл. пр-ве)
Док-во
$$H^T H \underset{\text{св.1}}{=} H^2 = \left(E - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2}\right)\left(E - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2}\right) =$$
$$= E - 4\frac{vv^T}{\|v\|^2} + 4\frac{v(v^Tv)v^T}{\|v\|^4} = \{\text{исп-ся ассоц-ть произв-я м-ц}\} =$$
$$= \{\text{т.к. } v^Tv = \|v\|^2\} =$$
$$= E - 4\frac{vv^T}{\|v\|^2} + 4\frac{vv^T}{\|v\|^2} = E$$
$$\Rightarrow \{H^{-1}H = E\} \Rightarrow H^T = H^{-1} \text{ – о/г}$$

Утв. (3) св-во)
$\exists$ задан произв. вектор-столбец $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$
$\Rightarrow$ можно выбрать вектор v:
$$Hx = \underbrace{\begin{pmatrix} -\|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{можем подавить все компоненты кроме первой}},\ \text{где } \|x\| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)^{1/2}$$

Док-во
Будем искать v в виде:
$$v = x + \sigma z,$$
$$z = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T,\ \sigma > 0 \text{ – конст.}$$
Док., что
$$Hx = \begin{pmatrix} -\|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$Hx = x - 2\frac{(x+\sigma z)(x+\sigma z)^T}{\underbrace{(x+\sigma z)^T(x+\sigma z)}_{\|v\|^2}} x =$$
$$= x - (x+\sigma z)\frac{2(x+\sigma z)^T x}{(x+\sigma z)^T(x+\sigma z)} = \{\text{исп. св-ва скал. произв-я}\} =$$
$2(x+\sigma z)^T x = 2\|x\|^2 + 2\sigma x_1$
$(x+\sigma z)^T(x+\sigma z) = \|x\|^2 + \sigma x_1 + \sigma x_1 + \sigma^2 1$
Возьмём $\sigma = \|x\| \Rightarrow$ числитель совп. со зн-лем и будет равен $2\|x\|^2 + 2\|x\|x_1$
$\Rightarrow$ дробь $= 1$

$$\Rightarrow Hx = x - x - \sigma z = \begin{pmatrix} -\|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ ∎

Опр. ВПТФ – м-ца, кот. имеет вид
$$\begin{pmatrix} \times & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \times \cdots & \times \\ 0 & 0 & \times\times \cdots & \times \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots \times & \times \end{pmatrix}$$
$\times$ – ненул. эл-ты, они заполн. верхний Δ и нижн. побочную диаг-ль

$$(C)_{ij} = 0,\ i \geq j+2.$$

Покаж, что $\forall$ м-цу, исп-я св-ва 1)-3), можно свести к ВПТФ.
Конечно из неё сразу нельзя взять с.зн-ия.
Но потом можно перейти к итерац. методу.

М-цу A запишем в блочном виде:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & y_{m-1} \\ x_{m-1} & A_{m-1} \end{pmatrix},\ \text{где}$$
$x_{m-1} = (a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{m1})^T$ – столбец
$y_{m-1} = (a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1m})$ – строка

Зам. Невыр-ть A не треб-ся.
По св.3) $\Rightarrow H_{m-1} x_{m-1} = \begin{pmatrix} -\|x_{m-1}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -\sigma_1 z_{m-1}$ (обозн), где $\sigma_1 = \|x_{m-1}\|$, где
$$\|x_{m-1}\| = \left(\sum_{i=2}^m a_{i1}^2\right)^{1/2} \quad \{H\ (m-1, m-1) \text{ порядок}\}$$

Обозн.
$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & O_{12} \\ O_{21} & H_{m-1} \end{pmatrix} \in R^{m\times m}$$

Св-ва U_1:
1) $U_1 = U_1^T \Rightarrow U_1$ – симм.
2) U_1 – ортогональна ($U_1^T = U_1^{-1}$)
$$\left\{ U_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & O_{12} \\ O_{21} & H_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & O_{12} \\ O_{21} & H_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & O_{12} \\ O_{21} & H_{m-1}^2 \end{pmatrix} = \right.$$
$= \{$св-ва 1)-3) м-цы H$\} = E$
$\Rightarrow U_1^T = U_1^{-1} \Rightarrow U$ – о/г $\}$

Умножим U_1^{-1} слева на A:
$$U_1^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & O_{12} \\ O_{21} & H_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & y_{m-1} \\ x_{m-1} & A_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & y_{m-1} \\ H_{m-1}x_{m-1} & H_{m-1}A_{m-1} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} & y_{m-1} \\ -\sigma_1 z_{m-1} & H_{m-1}^{-1}A_{m-1} \end{pmatrix}$$
Теперь получ-ю м-цу справа умн на U_1:
$$C_1 \underset{\text{обозн.}}{=} U_1^{-1}AU_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & y_{m-1} \\ -\sigma_1 z_{m-1} & H_{m-1}^{-1}A_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & O_{12} \\ O_{21} & H_{m-1} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} & y_{m-1}H_{m-1} \\ -\sigma_1 z_{m-1} & H_{m-1}^{-1}AH_{m-1} \end{pmatrix} \underset{\text{структура}}{=} \begin{pmatrix} \times & \times & \\ \times & \times & \\ 0 & \times & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & \times & \end{pmatrix},$$
где $\times = C_{ij}^{(1)} \neq 0$ (после 1-го шага)
Т.о., C_1 из A получ-ся с пом-ю преоб-ий подобия.

Далее рассм. вектор
$$x_{m-2} = (C_{32}^{(1)}, C_{42}^{(1)}, \ldots, C_{m2}^{(1)})^T$$
По св.3) можно выбр. v:
$$H_{m-2}x_{m-2} = -\sigma_2 z_{m-2} = (-\|x_{m-2}\|, 0, \ldots, 0)^T$$
М-цу U_2 предст. в виде:
$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & O \\ 0 & 1 & \\ O & & H_{m-2} \end{pmatrix} :\quad \begin{matrix} 1)\ U_2 = U_2^T \Rightarrow U_2 \text{ – симм} \\ 2)\ U_2 \text{ – о/г } (U_2^T = U_2^{-1}) \end{matrix}$$

Получим м-цу $C_2 = U_2^{-1}C_1U_2 =$ (структура)
$$= \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \\ 0 & \times & \times & \\ 0 & 0 & \times & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \times & \end{pmatrix}$$
C_2 можно запис. в виде:
$$C_2 = U_2^{-1}\overbrace{U_1^{-1}AU_1}^{C_1}U_2$$
$\Rightarrow$ через $(m-2)$ шага получим м-цу C:
$$C = U_{m-2}^{-1}U_{m-3}^{-1}\cdots U_2^{-1}U_1^{-1}AU_1U_2\cdots U_{m-2}$$
Эта м-ца будет иметь ВПТФ.
Нам важно будет что это преобр подобия.
Обозн.
$$U = U_1U_2\cdots U_{m-2} \qquad U_i \text{ – о/г } \forall i = \overline{1, m-2}$$
$$U^{-1} = (U_1\cdots U_{m-2})^{-1} =$$
$$= U_{m-2}^{-1}\cdots U_1^{-1} = U_{m-2}^T\cdots U_1^T =$$
$$= (U_1\cdots U_{m-2})^T = U^T$$
$\Rightarrow$ м-ца U – о/г $\{U^{-1} = U^T\}$
$\Rightarrow$ м-ца C получена из A с помощью преобр-ия подобия с о/г м-цей U.
$$\boxed{C = U^{-1}AU}$$
$\Rightarrow \forall$ м-цу можно свести к ВПТФ с помощью преобр-ий подобия ∎

Зам 1 если $C = U^{-1}AU$ (U – о/г)
$\Rightarrow \lambda_A = \lambda_C$

Т.е. при переходе от A к C с помощью преобр-ий подобия спектр с.з. сохраняется.

Док-во
$\exists\, Ax = \lambda x,\ x \neq 0$
$U^{-1}Ax = \lambda U^{-1}x$
Обозн. $U^{-1}x \overset{df}{=} y \Rightarrow x = Uy$
$\Rightarrow U^{-1}AUy = \lambda y \Rightarrow Cy = \lambda y,\ y \neq 0$
$\Rightarrow$ при преобр-ии подобия спектр с.зн-ий сохр-ся ∎

Зам 2 Преобр подобия с о/г м-цей сохраняет симметрию, т.е. если $A = A^T \Rightarrow C = C^T$
Док-во $C = U^{-1}AU$
$$C^T = (U^{-1}AU)^T = U^TA^T(U^{-1})^T = U^{-1}AU = C$$ ∎
Т.о., при преобр-ии подобия C получится трёхдиагональная

§11. Понятие о QR-алгоритме. Решение полной проблемы собственных значений.

Реш. полн. пробл. с.зн-ий с пом. итерац. метода.
(1) $Ax = \lambda x,\ x \neq 0$

(2) Факт: $\forall$ м-цу A можно предст. в виде: $A = QR$, где
Q – ортог-я ($Q^T = Q^{-1}$),
$R = \begin{pmatrix} \times & \times \\ O & \times \end{pmatrix}$ – верхняя треуг-я

Покажем, что QR-разложение возможно для любой матрицы.

$\exists\, x = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})^T$ – 1-ый столбец м-цы A;
по этому вект мож. выбрать вектор $v = x + \|x\|z$;
$$H_1 = E - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2} : H_1x = \begin{pmatrix} -\|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
Подейств. H_1 слева на A:
$$H_1A = \begin{pmatrix} \times & \times & \\ 0 & \times & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & \times & \end{pmatrix} \text{ – структура.}$$
Далее берём вектор разм $(m-1)$.
Для него $\exists$
$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \quad H\ (m-1, m-1)$$
$$\Rightarrow H_2H_1A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \\ 0 & \times & \times & \\ 0 & 0 & \times & \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \times & \end{pmatrix}$$
$\ldots \Rightarrow$ после $(m-1)$ шага
$$H_{m-1}H_{m-2}\cdots H_2H_1A = \begin{pmatrix} \times & & \times \\ & \ddots & \\ O & & \times \end{pmatrix} = R \text{ – верхн. треуг. м-ца}$$

Док. теперь, что Q – ортогональная.
Рассм. м-цу Q:
$$Q = H_1H_2\cdots H_{m-1}$$
$$Q^{-1} = H_{m-1}^{-1}\cdots H_2^{-1}H_1^{-1} = \{\text{т.к. } H_i \text{ – симм, ортог.}\}$$
$$= H_{m-1}^T\cdots H_2^TH_1^T = (H_1H_2\cdots H_{m-1})^T = Q^T$$
$\Rightarrow Q$ – о/г м-ца. ∎
Было $H_{m-1}\cdots H_1A = R \overset{H_i = H_i^{-1}}{\Longrightarrow} Q^{-1}A = R \Rightarrow$
$\Rightarrow A = QR$

Зам Если делать QR-разл-е произв. м-цы, то надо $O(m^3)$ действий.
Если A – ВПТФ $\Rightarrow O(m^2)$,
если A – трёхдиаг $\Rightarrow O(m)$

Зам QR-алг-м – молодой и нет хорошего д-ва его сх-ти
{Введин „Выч. основы ЛА" или Уилкенсон}

$\exists\, A_0$ – м-ца;
её можно разложить
(3) $A_0 = Q_0R_0$, где $Q_0^{-1} = Q_0^T$, R_0 – ВТФ
(4) $\exists\, A_1 \overset{df}{=} R_0Q_0$
Из (3) $\Rightarrow R_0 = Q_0^{-1}A \Rightarrow (4) \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1 = Q_0^{-1}A_0Q_0 \Rightarrow$ спектр с.з. у м-ц A_0 и A_1 одинак-ый (т.к. они подобны и Q_0 – о/г)

A_1 также можно разл-ть.
$$A_1 = Q_1R_1,\quad A_2 \overset{df}{=} R_1Q_1$$
$- - - - - -$
(5) $A_k = Q_kR_k$
(6) $A_{k+1} \overset{df}{=} R_kQ_k$, $k = 0,1,2,\ldots$
// A_0 – исходная матрица.

10.03.04. Лекция 9.

Куда же будет сх-ся этот ит. мет?
($k \to \infty$)
- $A_k \approx \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \times \\ & \lambda_2 & \\ O & & \lambda_m \end{pmatrix}$, если λ_i – веществ-е.
- $A_k \approx \begin{pmatrix} \times & & \\ & \times\ \boxed{\begin{smallmatrix}\times & \times \\ \times & \times\end{smallmatrix}} & \\ O & & \boxed{\cdots} \end{pmatrix}$, если λ_i – комплексные (будет стремиться; $\mathrm{Re}\,\lambda$, $\mathrm{Im}\,\lambda$)

?

Мы будем выходить из итерации, когда числа будут удовл. зад-ой степени точности.
Т.о, QR-алг – униве. с т.з. пробл. с.з. метод.
Недостаток – надо держать в памяти всю матрицу.

На кажд. итер. надо делать разлож-е вида (5)-(6).

Если A – произв $\Rightarrow O(m^3)$,
A – ВПТФ $\Rightarrow O(m^2)$,
A – трёхдиаг-я $\Rightarrow O(m)$ действий. (на кажд. шаге QR-алг-ма)

Хотелось бы, чтобы изначально A_0 была попроще.
В пред. § мы пок, что $\forall$ м-цу можно свести к ВПТФ.
Т.е. произв. м-цу сначала сделаем ВПТ, а потом начнём процесс.

Очень важно, что QR-алгоритм такой, что он не ухудшает ВПТФ.
Откуда это следует?
Сейчас докажем две леммы.
Т.о., при кажд. (k) будем осущ-ть $O(m^2)$ действий.
К тому же, если м-ца симм-я, то ВПТФ будет давать трёхдиагональную.
Это вообще хорошо.

§12. Предварительное преобразование матрицы к ВПТФ. Неухудшение ВПТФ при QR-алгоритме.

$\exists\, A\ (m\times m)$
QR-алгоритм:
(1) $A_k = Q_kR_k$
(2) $A_{k+1} \overset{df}{=} R_kQ_k$, $k = 0,1,2,\ldots$

Сначала м-цу A сводим к м-це A_0, имеющей ВПТФ
(с пом. преобр-ий подобия $\Rightarrow$ спектр при этом сохр-ся)
$$A_{k+1} = Q_k^{-1}A_kQ_k$$
Если мы приведем м-цу к ВПТФ, то при QR-алг. она неухудш.

Лемма 1. $\exists\, A, B$ – кв. м-цы m-го порядка,
$\exists\, B$ – верхн. треуг. формы (ВТФ),
A – ВПТФ
(3) $\Rightarrow C = BA$ – ВПТФ

Док-во Распишем поэлементно
$$c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^m b_{i\alpha}a_{\alpha j} =$$
Учтём вид м-цы B: $b_{i\alpha} = 0,\ i > \alpha \Rightarrow$
$$= \sum_{\alpha=i}^m b_{i\alpha}a_{\alpha j} =$$
Учтём вид м-цы A: $a_{\alpha j} = 0,\ \alpha > j+1 \Rightarrow$
$$= \sum_{\alpha=i}^{j+1} b_{i\alpha}a_{\alpha j}$$
Док, что $c_{ij} = 0$ при $i > j+1$
(т.к. верх. предел суммир-я < чем нижний)
$\Rightarrow C$ – ВПТФ ∎

Лемма 2. $\exists\, A, B\ (m\times m)$: B – ВПТФ, A – ВТФ
$\Rightarrow C = BA$ – ВПТФ.

Док-во (аналогично)

Пок. с пом-ю этих лемм, что QR-алг. не ухудш. ВПТФ.

Процесс начнётся с $A_0 = Q_0R_0$ (A_0 – ВПТФ).
$\Rightarrow Q_0 = \underset{\text{ВПТФ}}{A_0}\underset{\text{ВТФ}}{R_0^{-1}} \Rightarrow Q_0$ – ВПТФ (лемма 1)
Рассм. $A_1 \overset{df}{=} \underset{\text{ВТФ}}{R_0}\underset{\text{ВПТФ}}{Q_0} \Rightarrow A_1$ – ВПТФ (лемма 2)
$\ldots$
$\Rightarrow A_k$ – ВПТФ, A_{k+1} – ВПТФ

Глава II. Интерполирование и приближение функций.

§1. Постановка задачи интерполирования

$\exists\, a \le x \le b$ – отрезок.
Разбиваем его узлами:
$$a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$$
$\{x_i\}_0^n$ – $(n+1)$ узел
$\exists$ в узлах задано зн-е ф-ции
$$f(x_i) = f_i,\ i = \overline{0,n}$$
А нам надо построить такое приближение, кот. в этих узлах будет совп. с f_i, а между ними будет приближать исх. ф-цию.
Задача эта имеет беск. много решений.

Мы будем приближать алг-ми полиномами n-ой степени:

(1) $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,\ a_n \neq 0.$

Если искать его так, чтобы
(2) $P_n(x_i) = f_i,\ i = \overline{0,n}$
то говорят, что $P_n(x)$ – это интерпол. полином, построенный по узлам x_i, для ф-ции $f(x)$.

Покажем, что реш-е зад. прибл-я алг-ми пол-ми $\exists!$.
Для нахож-я a_i имеем систему:
(3) $$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n = f_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n = f_1 \\ - - - - - - - \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n = f_n \end{cases}$$

Мы знаем, что сист. лин. алг. ур. определена, когда число ур. = числу неизв-х.
Выпишем определитель:
$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ - & - & - & - & - \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i > j \ge 1}(x_i - x_j) \neq 0, \text{ т.к. } x_i \neq x_j \Rightarrow$$
Опр-ль Вандермонда
$\Rightarrow$ система определённая $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ набор коэф-ов a_i единственен.

На 2-ом курсе мы получали интерпол. ф-лу Лагранжа.
Сейчас получим – " – Ньютона.
Иногда удобна одна, иногда другая форма.

§2. Интерполяционная формула Лагранжа ($L_n(x)$).

Задача: есть отрезок $a \le x \le b$
есть узлы разбиения
$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ $\{x_i\}_0^n$ – $(n+1)$ узел
и в них задано зн-е приближаемой ф-ции $f(x_i) = f_i,\ i = \overline{0,n}$

Ищем полином в виде
$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x)f(x_k), \quad (1)$$
где $c_k(x)$ – мн-н n-ой степени.
Такая форма инт. мн-на наз. формой Лагранжа.

c_k ищем из усл-ия: $L_n(x_i) = f_i,\ i = \overline{0,n}$
$c_k(x)$ ищем в виде:
$$c_k(x) = \lambda_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)$$

Вводится многочлен
$w(x) \overset{df}{=} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ $(n+1)$-ой степени
Запишем его в виде
$$w(x) = (x - x_k)[\ldots]$$
$$\Rightarrow w'(x) = [\ldots] + (x - x_k)[\ldots]'$$
$$\Rightarrow w'(x_k) = (x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)$$
$\Rightarrow c_k(x)$ запиш-ся в след. виде:
$$c_k(x) = \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)} \text{ – мн-н } n\text{-ой степени}$$
$\Rightarrow L_n(x)$ имеет вид:
$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)}f(x_k)} \text{ – полином Лагранжа.}$$
Какова погрешность пол. Л.?
$\psi_{L_n}(x) = f(x) - L_n(x)$ – погр-ть инт. ф-лы Лагр.
Ясно, что $\psi_{L_n}(x_i) = 0,\ i = \overline{0,n}$
Введём ф-цию
$$g(s) = f(s) - L_n(s) - Kw(s),$$
K ищется из усл-ия $g(x) = 0,\ x \in [a,b]$
Получаем оценку погр-ти инт. пол. Лагр.
$$\psi_{L_n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w(x),\ \xi \in [a,b]$$
обозн. $M_{n+1} \overset{df}{=} \sup\limits_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)| \Rightarrow |\psi_{L_n}(x)| \le \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}|w(x)|$
В этой оц. заложен очень коварный факт.
Казалось бы, что при $n \to \infty$, погр-ть $\to 0$.
Это не так.
ex (Калиткин „ЧМ"
– прибл-ея негр. возр. $\Rightarrow$ сх-ти нет)

Не надо стремится брать n большим, а надо исп-ть сплайны.

Посл. оц. пок-ет, что если мы прибл. ф-цию степ. $\le n$, то пол-ом Лагр. мы её прибл-ем точно.

§3. Разделённые разности.

$\exists\, x \in [a,b]$ – отрезок
$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_N \le b$ – узлы разбиения $\{x_i\}_0^N$
В узлах зад. зн-е ф-ции:
$$f(x_i) = f_i,\ i = \overline{0,N}$$

Опр. Раздел-ой разностью 1-го порядка, постр-ой по узлам x_i, x_j, наз-ся отношение
$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i},\ i,j = \overline{0,N},\ i \neq j$$
Почти всегда рассм-ся соседние узлы.
Это дискретный аналог 1-ой произв-ой.
$$\Rightarrow f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$
$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
Разд. разн. 2-го пор., постр. по узлам x_0, x_1, x_2:
$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$
$\ldots$

∃ есть разд-е разности k-го порядка:
$f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k})$, $i,j=\overline{0,N}$, $i\neq j$ и
$f(x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+k+1})$

$\Rightarrow$ разд. разн-ю $(k+1)$ пор, постр. по узлам $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}$:

$$f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}) = \frac{f(x_{j+1},\dots,x_{j+k+1}) - f(x_j,\dots,x_{j+k})}{x_{j+k+1}-x_j}$$

Инт. ф-ла Ньют. будет выр-ся ч/з разд-е разности $(n+1)$-го порядка.

Введём ф-цию

$$W_{0,n}(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$$W_{\alpha,\beta}(x) = (x-x_\alpha)(x-x_{\alpha+1})\cdots(x-x_\beta) = \prod_{j=\alpha}^{\beta}(x-x_j),$$

Найдём его произв-ю в узлах: $\alpha=\overline{0,\beta}$, $\beta=\overline{0,N}$

$$W'_{\alpha\beta}(x_i) = \prod_{\substack{j=\alpha \\ j\neq i}}^{\beta}(x_i-x_j) \quad \{\text{вывод аналогичен}\}$$

Утв. Разд-я разность k-го порядка может быть представлена в след-м виде:

(1) $$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{W'_{0,k}(x_i)} \quad \{\text{выр-е ч/з знач-ия ф-ции в узлах и зн-ия произв. полинома}\}$$

Док-во
По индукции (по k)

$\boxed{K=1}$
$$f(x_0,x_1) \overset{df}{=} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$$
$\Rightarrow$ при $k=1$ ф-ла верна

16.03.04.
Лекция 10

∃ для $\boxed{k=\ell}$ ф-ла верна

$$\Rightarrow f(x_0,x_1,\dots,x_\ell) = \sum_{i=0}^{\ell}\frac{f(x_i)}{W'_{0,\ell}(x_i)}$$
$$f(x_1,x_2,\dots,x_{\ell+1}) = \sum_{i=1}^{\ell+1}\frac{f(x_i)}{W'_{1,\ell+1}(x_i)}$$
— разделённые разн-ти порядка ℓ

Разд. разн. $(\ell+1)$-го пор:

$$f(x_0,x_1,\dots,x_{\ell+1}) \overset{df}{=} \frac{1}{x_{\ell+1}-x_0}\left(f(x_1,\dots,x_{\ell+1})-f(x_0,\dots,x_\ell)\right) =$$
$$= \frac{1}{x_{\ell+1}-x_0}\left(\sum_{i=1}^{\ell+1}\frac{f(x_i)}{W'_{1,\ell+1}(x_i)} - \sum_{i=0}^{\ell}\frac{f(x_i)}{W'_{0,\ell}(x_i)}\right) =$$
$$= \frac{1}{x_{\ell+1}-x_0}\left(\frac{f(x_{\ell+1})}{W'_{1,\ell+1}(x_{\ell+1})} - \frac{f(x_0)}{W'_{0,\ell}(x_0)} + \sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{f(x_i)}{W'_{1,\ell+1}(x_i)} - \frac{f(x_i)}{W'_{0,\ell}(x_i)}\right)\right)$$

$$= \left\{\begin{matrix}(x_{\ell+1}-x_0)W'_{1,\ell+1}(x_{\ell+1}) = W'_{0,\ell+1}(x_{\ell+1}); \\ (x_{\ell+1}-x_0)W'_{0,\ell}(x_0) = -W'_{0,\ell+1}(x_0)\end{matrix}\right\} \ominus$$

$$\frac{1}{x_{\ell+1}-x_0}\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{f(x_i)}{W'_{1,\ell+1}(x_i)} - \frac{f(x_i)}{W'_{0,\ell}(x_i)}\right) = \frac{1}{x_{\ell+1}-x_0}\sum_{i=1}^{\ell}f(x_i)\Bigg(\frac{(x_i-x_0)}{\underbrace{W'_{1,\ell+1}(x_i)(x_i-x_0)}_{W'_{0,\ell+1}(x_i)}} - \frac{(x_i-x_{\ell+1})}{\underbrace{W'_{0,\ell}(x_i)(x_i-x_{\ell+1})}_{W'_{0,\ell+1}(x_i)}}\Bigg) = \sum_{i=1}^{\ell}\frac{f(x_i)}{W'_{0,\ell+1}(x_i)}$$

$$\ominus \frac{f(x_0)}{W'_{0,\ell+1}(x_0)} + \frac{f(x_{\ell+1})}{W'_{0,\ell+1}(x_{\ell+1})} + \sum_{i=1}^{\ell}\frac{f(x_i)}{W'_{0,\ell+1}(x_i)} =$$
$$= \sum_{i=0}^{\ell+1}\frac{f(x_i)}{W'_{0,\ell+1}(x_i)} \quad ■$$

Попытаемся выразить $f(x_k)$ ч/з $f(0)$ и разд-е разности до k-го порядка.

$\underline{k=1}$
$$f(x_0,x_1) \overset{(1)}{=} \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0} \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ {домнож. на x_1-x_0} $\Rightarrow$
$$\Rightarrow \boxed{f(x_1) = f(x_0) + (x_1-x_0)f(x_0,x_1)}$$

$\underline{k=2}$
$$f(x_0,x_1,x_2) \overset{(1)}{=} \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$
$\Rightarrow$ {домн. на $(x_2-x_0)(x_2-x_1)$}

(2) $$\Rightarrow (x_2-x_0)(x_2-x_1)f(x_0,x_1,x_2) = \underbrace{-\frac{f(x_0)(x_2-x_1)}{(x_0-x_1)}}_{\alpha} - \frac{f(x_1)(x_2-x_0)}{x_1-x_0} + f(x_2) \Rightarrow \left\{\text{подст. выр-е для } f(x_1)\right\}$$

$$\frac{f(x_1)(x_2-x_0)}{x_1-x_0} = \frac{(x_2-x_0)f(x_0) + (x_2-x_0)(x_1-x_0)f(x_0,x_1)}{x_1-x_0} = \underbrace{\frac{(x_2-x_0)f(x_0)}{x_1-x_0}}_{\beta} + (x_2-x_0)f(x_0,x_1)$$

$$\alpha+\beta = -\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}(x_2-x_1-x_2+x_0) = -f(x_0)$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} f(x_2) = f(x_0) + (x_2-x_0)f(x_0,x_1) + (x_2-x_0)(x_2-x_1)f(x_0,x_1,x_2)$$

. . . .

метод полной мат. инд. по k даёт:

(3) $$f(x_k) = f(x_0) + (x_k-x_0)f(x_0,x_1) + (x_k-x_0)(x_k-x_1)f(x_0,x_1,x_2) + \dots + (x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})f(x_0,\dots,x_k)$$

§4. Интерполяционная формула Ньютона.

$x\in[a,b]$ – отрезок
$a\le x_0<x_1<\dots<x_n\le b$
$\{x_i\}_0^n$ – узлы разбиения
задано $f(x_i)=f_i$, $i=\overline{0,n}$

Строим приближ-ый полином в след. виде:

(1) $$N_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0,x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2) + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f(x_0,\dots,x_n)$$

требуем $N_n(x_i)=f(x_i)$, $i=\overline{1,n}$ — интерполяц-ый полином n-ой степ.

$$\Rightarrow N_n(x_i) = f(x_0) + (x_i-x_0)f(x_0,x_1) + (x_i-x_0)(x_i-x_1)f(x_0,x_1,x_2) + \dots + (x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})f(x_0,x_1,\dots,x_i) \overset{(3)}{=} f(x_i),\ i=\overline{0,n}$$

$\Rightarrow$ $N_n(x)$ явл. интерп. полиномом; он наз-ся инт. пол-мом Ньютона.

Этот ИМ единственен; он совп. с ИМ Лагранжа — это просто другая форма записи $\Rightarrow$ погреш-ть та же. Зачем же он нужен?

Зам. Область применимости ИП Ньют. и Л. разная.
Если инт-ем одну ф-цию и хотим получить её значение в большем числе узлов, то И ф-ла Ньют. очень эфф-на.

Если же узлы зафиксировано, но меняется ф-ция, то эфф-на инт. ф-ла Лагранжа.

Погрешность ИФ Ньютона

$$\psi_{N_n}(x) \overset{df}{=} f(x) - N_n(x)$$

надо делать ограничение на гладкость f
$\Rightarrow$ ∃ f – достаточно гладка ($\exists f^{(n+1)}(\xi)$)

Обозн. $M_{n+1} = \sup_x |f^{(n+1)}(x)|$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi_{N_n}(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|w(x)|}$$

§5. Интерполирование с кратными узлами. Интерполяционная формула Эрмита.

∃ $x\in[a,b]$ – отрезок

(1) Узлы: $x_0\ x_1\ \cdots\ x_m$ – $(m+1)$ узел

(1) В узлах задано: $f(x_0)\ f(x_1)\ \cdots\ f(x_m)$ – значение ф-ции и производные до опред-го порядка:

(1) $$f^{(a_0-1)}(x_0)\quad f^{(a_1-1)}(x_1)\ - - - -\ f^{(a_m-1)}(x_m), \quad a_i\in N,\ i=\overline{0,m}$$

Надо постр. полином, у кот. зн-е в узлах совп. со зн-ми ф-ции в узлах и зн-ие производных в узлах совп. со зн-ми произв. ф-ции в узлах.
Строим

(2) $$H_n(x):\quad H_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k),\quad k=\overline{0,m},\ i=\overline{0,(a_k-1)}$$
полин. n-ой степ.

$a_0+a_1+\dots+a_m = n+1$ (полином строим по $(n+1)$-ому данному) (*)

Полином $H_n(x)$ будем искать в виде:

(3) $$H_n(x) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{a_k-1}C_{k,i}(x)f^{(i)}(x_k),$$

где $C_{k,i}(x)$ – многочлен n-ой степ.

Замеч. Если (*) вып., то $H_n(x)$ ∃!

Будем строить ИП Эрмита по 3-м узлам, из кот-х средний будет кратным.

x_0	x_1	x_2	– узлы
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	
	$f'(x_1)$		

Можем построить $H_3(x)$:
$H_3(x_0)=f(x_0)$;
$H_3(x_1)=f(x_1)$; $H_3'(x_1)=f'(x_1)$;
$H_3(x_2)=f(x_2)$

Будем искать ИП в виде:

(4) $$H_3(x) = C_0(x)f(x_0) + C_1(x)f(x_1) + C_2(x)f(x_2) + B_1(x)f'(x_1),$$

где $C_0(x), C_1(x), C_2(x), B_1(x)$ – многочлены 3-ей степени

Коэф-ты:

$C_0(x_0)=1$,	$C_1(x_0)=0$	$C_2(x_0)=0$	$B_1(x_0)=0$
$C_0(x_1)=0$,	$C_1(x_1)=1$	$C_2(x_1)=0$	$B_1(x_1)=0$
$C_0(x_2)=0$,	$C_1(x_2)=0$	$C_2(x_2)=1$	$B_1(x_2)=0$
$C_0'(x_1)=0$	$C_1'(x_1)=0$	$C_2'(x_1)=0$	$B_1'(x_1)=1$

Если эти усл-ия выполнены $\Rightarrow$ полином интер-ый.

$$C_0(x) = K(x-x_1)^2(x-x_2) \quad \text{– будем искать в виде \{учит. кр-ть нулей\}}$$
$\Rightarrow \{C_0(x_0)=1\} \Rightarrow C_0(x_0)=K(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)=1$
$$\Rightarrow C_0(x) = \frac{(x-x_1)^2(x-x_2)}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)}$$
$$C_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)^2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)^2}$$
$$B_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$C_1(x) = (x-x_0)(x-x_2)(ax+b)$
$C_1(x_1)=1=(x_1-x_0)(x_1-x_2)(ax_1+b) \Rightarrow$
$$\Rightarrow ax_1+b = \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$C_1'(x_1) = (x-x_0)(x-x_2)a + (ax+b)(2x-x_0-x_2)$
$\Rightarrow \{C_1'(x_1)=0\} \Rightarrow 0 = (x_1-x_0)(x_1-x_2)a + \underline{(ax_1+b)}(2x_1-x_0-x_2)$
$\Rightarrow$ {подст. ax_1+b} $\Rightarrow$
$$\Rightarrow 0 = (x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdot a + \frac{2x_1-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = -\frac{2x_1-x_0-x_2}{(x_1-x_0)^2(x_1-x_2)^2}$$
$$b = \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{(2x_1-x_0-x_2)x_1}{(x_1-x_0)^2(x_1-x_2)^2} =$$
$$= \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\left(1 + \frac{(2x_1-x_0-x_2)x_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right)$$
$$C_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_0-x_2)(x_1-x_2)}\left[1 - \frac{(x-x_1)(2x_1-x_0-x_2)}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)}\right]$$

Погрешность.

(5) Введём $g(s) \overset{df}{=} f(s) - H_3(s) - Kw(s)$,
где $w(x) = (x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$, – полином 4-й степени
$x\in[x_0,x_2]$

(K) выбираем из усл-я: $g(x)=0$
$$\Rightarrow K = \frac{f(x)-H_3(x)}{w(x)}$$
$$\psi_{H_3}(x) \overset{df}{=} f(x) - H_3(x)$$
∃ f имеет необх-ю гладкость
$g(s)$ обращ-ся в 0 4 раза:
$g(x_0)=g(x_1)=g(x_2)=g(x)=0$
$\Rightarrow$ по теор. Ролля $\Rightarrow$ 1-ая произв. $g'(s)$ имеет 3 нуля (не менее 3-х нулей) на $[x_0,x_2]$
Но $g'(x_1)=0 \Rightarrow g'(s)$ имеет на $[x_0,x_2]$ не менее 4-х нулей $\Rightarrow$
$\Rightarrow g''(s)$ — " — 3-х $\Rightarrow g'''(s)$ — " — 2-х $\Rightarrow$
$\Rightarrow g^{(4)}(s)$ — " — 1-го нуля:
$\exists\, \xi\in[x_0,x_2]:\ g^{(4)}(\xi)=0$
$$g^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4!\cdot K \Rightarrow \psi_{H_3}(x) = f(x) - H_3(x) = \underbrace{\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}}_{K}\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)}_{w(x)}$$

Обозн. $M_4 = \sup_{x_0\le x\le x_2}|f^{(4)}(x)|$
$$\Rightarrow |\psi_{H_3}(x)| \le \frac{M_4}{4!}|w(x)|$$

17.03.
Лекц. 11

Погрешность
$$\psi_{H_n}(x) = f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{a_0}(x-x_1)^{a_1}\cdots(x-x_m)^{a_m}, \quad \xi\in[a,b]$$

Зам. ИП Эрмита может быть получен из ИП Лагранжа с помощью предельного перехода.
x_0, x_1, x_2, x_3 – узлы
ИП Э. – $H_3(x)$; $L_3(x)$ – ИП Л.
$$\lim_{x_3\to x_1} L_3(x) = H_3(x)$$

§6. Использование $H_3(x)$ для оценки погрешности квадратурной формулы Симпсона.

∃ $x\in[a,b]$
Вычислим опр. инт-л $\int_a^b f(x)dx$
надо разбить $[a,b]$ на узлы:
$x_i - x_{i-1} = h$, $i=\overline{1,N}$, h – шаг разбиения

h
x_{i-1} x_i

частичный отрезок

Квадр. ф-ла Симпс. на част. отр. имеет вид:

(1) $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(f_{i-1} + 4f_{i-\frac12} + f_i\right), \quad i=\overline{1,N}$$
$f_{i-\frac12} = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$

Ф-ла (1) – квадр. ф-ла инт-го типа (приближаем подинт. ф-цию ИП Л. $L_2(x)$)

Сейчас мы пок., что кв. ф-ла Симпс. точна ∀ полинома 3-ей степ.
(для 2-ой – очевидно по постр-ю)

Если $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, то для части $a_0 + a_1x + a_2x^2$ ф-ла точна
(по построению — ф-цию приближаем параболой по 3-ем точкам; 3-вя произв=0 $\Rightarrow$ погр.=0)

Пок., что она точна для части a_3x^3.

лев. ч.
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} x^3dx = \frac{x_i^4 - x_{i-1}^4}{4} = \frac{(x_i^2-x_{i-1}^2)(x_i^2+x_{i-1}^2)}{4} =$$
$$= \frac{\overbrace{(x_i-x_{i-1})}^{h}(x_i+x_{i-1})(x_i^2+x_{i-1}^2)}{4} = \frac{h}{4}(x_i+x_{i-1})(x_i^2+x_{i-1}^2) \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ вычислили лев. ч. кв. ф-лы.

Теперь вычислим правую:
$$\frac{h}{6}\left(x_{i-1}^3 + 4x_{i-\frac12}^3 + x_i^3\right) = \frac{h}{6}\left(x_i^3 + x_{i-1}^3 + 4\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)^3\right) =$$
$$= \frac{h}{6}(x_i+x_{i-1})\left[(x_i^2 - x_ix_{i-1} + x_{i-1}^2) + \frac{x_{i-1}^2 + 2x_ix_{i-1} + x_i^2}{2}\right] =$$
$$= \frac{h}{12}(x_i+x_{i-1})(2x_i^2 - \cancel{2x_{i-1}x_i} + 2x_{i-1}^2 + x_{i-1}^2 + \cancel{2x_{i-1}x_i} + x_i^2)$$
$$= \frac{h}{12}(x_i+x_{i-1})3(x_i^2+x_{i-1}^2) = \frac{h}{4}(x_i+x_{i-1})(x_i^2+x_{i-1}^2)$$
$\Rightarrow$ лев. ч. равна правой

$\Rightarrow$ для мн-на 3-ей степ. ф-ла Симпс. точна.

Займёмся вычислением погрешности квадр-х формул.

Погр. кв. ф-лы $\overset{df}{=}$ разность между лев. и пр. ч.

Построим полином $H_3(x)$, удовл. след. усл-м:

(2) $H_3(x_{i-1}) = f_{i-1}$;
$H_3(x_{i-\frac12}) = f_{i-\frac12}$;
$H_3(x_i) = f_i$.
($x\in[x_{i-1},x_i]$ – частичн. отрезок)

Как мы пок. на предыд. лекц. такой полином ∃! Но он нам не понадобится.

$$f(x) = H_3(x) + \underbrace{\psi_{H_3}(x)}\ \text{– погреш-ть} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_3(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i}\psi_{H_3}(x)dx \ominus$$
(H_3 – алг. мн-н 3-ей степ (для него ф. Симп. точна))

$$\ominus \frac{h}{6}\left(H_3(x_{i-1}) + 4H_3(x_{i-\frac12}) + H_3(x_i)\right) + \int_{x_{i-1}}^{x_i}\psi_{H_3}(x)dx =$$
$= \{$вместо H_3 подст. f в узлах$\} \overset{(2)}{=}$
$$= \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-\frac12} + f_i) + \Psi_i(f)$$
$$\Rightarrow \Psi_i(f) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-\frac12} + f_i)$$
$\Rightarrow$ надо оценить $\Psi_i(f)$ {это и есть искомая погр. квадр. ф-лы}

$$\psi_{H_3}(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac12})^2(x-x_i), \quad \xi\in[x_{i-1},x_i]$$

$$\Rightarrow |\Psi_i(f)| \le \frac{M_4}{4!}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac12})^2\underbrace{(x_i-x)}dx$$
обозн.
$M_4 = \sup_x|f^{(4)}(x)|$
чтобы все множители были неотр, поменяем местами

Надо посчитать ∫.
$x\in[x_{i-1},x_i]$ можно записать в виде:
$x = x_{i-1} + th$, $0\le t\le 1$ $\Rightarrow dx = h\,dt$
$x - x_{i-1} = th$; $x_i - x = h(1-t)$; $x - x_{i-\frac12} = h\left(t-\frac12\right)$
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac12})^2(x_i-x)dx =$$
$$= h^5\int_0^1 t\left(t-\frac12\right)^2(1-t)dt = \frac{1}{120}h^5$$
{посчитать}

$$\Rightarrow |\Psi_i(f)| \le \frac{M_4}{4!}\frac{h^5}{120} = O(h^5) \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ квадр. ф-ла Симпс. на част. отр. имеет 5-ый пор. точности

Теперь подсчит. погр-ть кв. фор. Симп. на всём отрезке:

Обозн. $$\Psi_h(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{N}\frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-\frac12} + f_i)$$
$$\Rightarrow |\Psi_h(f)| = \left|\sum_{i=1}^{N}\Psi_i(f)\right| \le \frac{M_4}{4!}\frac{h\cdot N\cdot h^4}{120} = \left\{hN = \frac{b-a}{N}N = b-a\right\}$$
$$= \frac{M_4}{4!}\frac{h^4}{120}(b-a) = \left(\frac{h}{2}\right)^4 M_4\frac{b-a}{180}$$

$\Rightarrow$ кв. ф. Симп. имеет 4-ый пор. точн. на $[a,b]$, тогда как прямоуг. и трап-ий – только 2-ой.

§7. Наилучшее среднеквадратичное приближение функций.

Ф-ции можно прибл. разн. способами (не только алг. полиномами).

Рассм. гильбертово пр-во:
$H=L_2$ – лин. пр-во:
$f\in L_2$ означает, что $\int_a^b f^2(x)dx < \infty \Rightarrow$
$\Rightarrow$ т.е. это ф-ция, интегрируемая с квадратом.

Введ. скал. произв.
$\forall f,g\in L_2$ $\quad (f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

$\Rightarrow$ норма вектора
$$\|f\| = \|f\|_{L_2} = (f,f)^{1/2} = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}$$

Теперь пр-во нормир-е

Пост. зад:
∃ есть система л/н. ф-ций, интегрир-х с квадратом:
$\exists\ \varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ – л/н:
$$\int_a^b \varphi_i^2(x)dx < \infty, \quad i=\overline{0,n}$$

Эту сист. иногда наз. базисной.
Составим обобщ-ый многочлен:

(1) $$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n}C_k\varphi_k(x), \quad C_k \text{ – числа}$$

Зад. о наил. ср. кв. пр: найти среди обобщ. мн-ов такой:

(2) $$\overline{\varphi}(x) = \sum_{k=0}^{n}\overline{C}_k\varphi_k(x),$$

для которого
$$\int_a^b\left(f - \sum_{k=0}^{n}C_k\varphi_k(x)\right)^2dx \overset{df}{=} \|f-\varphi(x)\|^2 \text{ был бы минимален}$$

Т.е. надо найти $\overline{\varphi}(x)$:
$$\|f - \overline{\varphi}(x)\| = \min_{\varphi(x)}\|f - \varphi(x)\|$$

$\Rightarrow \overline{\varphi}(x)$ – наилучшее среднеквадратичное приближение. (НСКП)

Покаж, что НСКП всегда ∃ и !.

Сначала рассм. случай $(n=0)$, т.е. когда ∃ только одна баз. ф-ция $\varphi_0(x)$.
$\Rightarrow$ Приближение ищем в виде
$\varphi(x) = C_0\cdot\varphi_0(x)$

Обозн. $$F(C_0) = \int_a^b(f(x) - C_0\varphi_0(x))^2dx \ominus$$

– это парабола по C_0 с ветвями, напр-ми вверх

$$\ominus\ C_0^2\int_a^b\varphi_0^2(x)dx - 2C_0\int_a^b f(x)\varphi_0(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx =$$
$$= C_0^2(\varphi_0,\varphi_0) - 2C_0(f,\varphi_0) + (f,f)$$
Мин. $F(C_0)$ будет дост-ся там, где
$F'(C_0)=0$

$$\Rightarrow 2C_0(\varphi_0,\varphi_0) = 2(f,\varphi_0) \Rightarrow C_0 = \frac{(f,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)} = \overline{C}_0 \text{ (обозн.)}$$

$\Rightarrow$ наил. ср. кв. прибл.
$$\overline{\varphi}(x) = \overline{C}_0\varphi_0(x); \quad \overline{C}_0 = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_0(x)dx}{\int_a^b\varphi_0^2(x)dx}$$

Пр $\{\exists\ \varphi_0(x)\equiv 1 \Rightarrow \overline{C}_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{\varphi}(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ – среднее зн-е инт-ла$\}$

СКП – это не поточечная близость, а интегральная.

Рассм. общую задачу.

∃ $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ – л/н сист. ф-ций:
$$\int_a^b\varphi_i^2(x)dx < \infty, \quad i=\overline{0,n}$$

Рассм. ф-л
$$F(C_0,C_1,\dots,C_n) \overset{df}{=} \int_a^b\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n}C_k\varphi_k(x)\right)^2dx =$$
{будем находить мин. этого ∫}
$$= \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=0}^{n}C_k\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx + \sum_{k=0}^{n}C_k\sum_{\ell=0}^{n}C_\ell\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_\ell(x)dx =$$
$$= (f,f) - 2\sum_{k=0}^{n}C_k(f,\varphi_k) + \sum_{k=0}^{n}C_k\sum_{\ell=0}^{n}C_\ell(\varphi_k,\varphi_\ell)$$

Мин. этой ф-ции будет достигаться там, где ЧП-ые обр-ся в ноль:

$$\frac{\partial F(C_0,\dots,C_n)}{\partial C_k} = 0, \quad k=\overline{0,n}$$

Получим систему:
$$\sum_{\ell=0}^{n}C_\ell(\varphi_k,\varphi_\ell) = (f,\varphi_k), \quad k=\overline{0,n}$$

Распишем её:

∃ пр-во вещественное
$$\begin{cases}C_0(\varphi_0,\varphi_0) + C_1(\varphi_0,\varphi_1) + \dots + C_n(\varphi_0,\varphi_n) = (f,\varphi_0) \\ C_0(\varphi_1,\varphi_0) + C_1(\varphi_1,\varphi_1) + \dots + C_n(\varphi_1,\varphi_n) = (f,\varphi_1) \\ - - - - - - - - - - - - - \\ C_0(\varphi_n,\varphi_0) + C_1(\varphi_n,\varphi_1) + \dots + C_n(\varphi_n,\varphi_n) = (f,\varphi_n)\end{cases}$$

– СЛАУ для нах-ия коэф-ов C_i, $i=\overline{0,n}$

Матрица
$$G(\varphi_0,\dots,\varphi_n) = \begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ - - & - & - - \\ (\varphi_n,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix} \text{ – м-ца Грама}$$

$\Rightarrow |G|>0$ (т.к. сист. $\varphi_0,\dots,\varphi_n$ – л/н) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ сист. определённая $\Rightarrow$ при ∀ пр. ч. решение ∃!

Её решение: $\overline{C}_0,\dots,\overline{C}_n$: $\overline{\varphi}(x)$ – НСКП.

Зам. опр-ль G мож. быть очень близок к 0 $\Rightarrow$ вычислять реш-ие трудно $\Rightarrow$ как же решать сист. при больших (n)?

Если бы сист. $\varphi_0,\dots,\varphi_n$ была бы ортонорм., т.е. $(\varphi_k,\varphi_\ell) = \delta_{k\ell}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow C_k = (f,\varphi_k)$, $k=\overline{0,n}$ – коэф-ты Фурье
$\Rightarrow$ решать ничего не надо!

Из ал. $\Rightarrow$ ∀ л/н сист. можно ортогонализовать методом Грамма-Шмидта.

Сам. простая сист. $1, x, x^2, \dots, x^n = \{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ – л/н

$$(\varphi_k,\varphi_\ell) = \int_\alpha^\beta\rho(x)\varphi_k(x)\varphi_\ell(x)dx, \quad \rho(x)>0 \text{ – вес}$$
будем находить в виде

Выбирая различные α,β,ρ можно получить мн-во ортог-х мн-ов системы: Якоби, Чебышева, Лежандра и т.д.

23.03.
Лекц. 12.

$$0 \le \int_a^b\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n}C_k\varphi_k(x)\right)^2dx = \int_a^b f^2(x)dx -$$
$$-2\sum_{k=0}^{n}C_k\underbrace{(f,\varphi_k)}_{C_k} + \sum_{k=0}^{n}C_k\sum_{\ell=0}^{n}C_\ell(\varphi_k,\varphi_\ell) \ominus \{\text{если } \{\varphi_k(x)\}_0^n \text{ – о/н система}\}$$
$$\ominus \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n}C_k^2 \ge 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n}C_k^2} \le \int_a^b f^2(x)dx = \boxed{\|f\|^2} \quad \text{нер-во Бесселя}$$

Если $\{\varphi_k(x)\}$ – о/н базис $L_2(a,b)$
$$\Rightarrow \boxed{\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}C_k^2} \quad \text{рав-во Парсеваля}$$

Глава III. Численное решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.

§1. Введение.

∃ f – непр. нелин-я ф-ция действ. арг-та.
Нам надо найти нули этой ф-ции, т.е. корни ур-ия

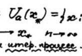
(1) $$f(x) = 0$$

Такое ур-е часто на практике решают с пом-ю итер. методов.

Ф-ция $f(x)$ часто исключительно сложная.
Поиск аналит-х решений ограничен.

Реш-е ур-ия (1) распадается на два этапа:

1) локализация корня:
$f(x_*)=0$, x_* – корень (нуль ф-ции)
Здесь мы должны найти окр-ть, в кот. нах-ся корень, чтобы начать итерац. процесс.
Эта лок-ция в общем случае осущ-ся в общ. компл. чисел.

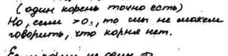


Ит. процесс нельзя начинать с ∀ нач. приближения.

2) $\exists\ x_*\in U_a(x_*) = \{x: |x-x_*|<a\}$ $a>0$ – окр-ть
ищем $x_n\to x_*$ $n\to\infty$
(строим итер. процесс)

(мы в основном будем заним-ся постр-м ит. процесса)

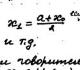
1) Способы локализации
(1.) Разбиваем отр. $[a,b]$ узлами:



если $f(x_{i-1})\cdot f(x_i)<0$, $x\in[x_{i-1},x_i]$ – корень
(один корень точно есть)
Но, если >0, то мы не можем говорить, что корня нет.

Если корень не один $\Rightarrow$
представим $f(x) = (x-x_*)g(x)$,
рассм. $g(x) = \frac{f(x)}{x-x_*}$

(2.) способ (Бисекции) – более регулярный метод



$x_0 = \frac{a+b}{2}$
∃ $f(a)<0$, $f(b)>0$ | если $f(x_0)>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_*\in[a,x_0]$
$x_1 = \frac{a+x_0}{2}$ если $f(x_1)>0 \Rightarrow x_*\in[a,x_1]$
и т.д.

Если говорится об ε-окр-ти т. x_0:
$x_*\in U_\varepsilon(x_0)$, $\varepsilon>0$ – задано.

Для систем ЧМ явл. очень эфф-ми.
Рассм. сист.:

(2) $$f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \quad i=\overline{1,m}$$

Введём вектор $\overline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$
$\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$

$\Rightarrow$ сист. (2) запиш-ся в виде $\overline{f}(\overline{x}) = 0$
{будем писать $f(x)=0$}

Можно трактовать f как отобр-е:
$f: R_m \to R_m$.

§2. Метод простой итерации (МПИ).

<u>Цель</u> – решить ур-е:

(1) $f(x)=0$

$\exists\, f(x)$ – непрерывная на $[a,b]$
$\exists\, x_*$ – корень: $f(x_*)=0$.
Он локализован: $x_*\in U_a(x_*)$
Причём степень точности локализации такая, кот. треб-ся методом.

<u>МПИ</u>: заменим ур-е (1) ур-ем

(2) $x=S(x)$

(3) Итер. процесс: $x_{n+1}=S(x_n)$, $n=0,1,2,\dots$;
$x_0\in U_a(x_*)$ – начальное приближение

Какой должна быть $S(x)$?

(4) $S(x)=x+\tau(x)f(x)$,

где $\tau(x)\;\forall$: $\operatorname{sign}\tau(x)\neq 0\;\;\forall x\in U_a(x_*)$

$\Rightarrow$ сходимость МПИ будет зависеть от выбора $\tau(x)$.

Опр. $S(x)$ – липшиц-непрерывна для $x\in U_a(x_*)$ с константой q, если $\forall x_1,x_2\in U_a(x_*)\Rightarrow$
$\Rightarrow |S(x_1)-S(x_2)|\le q\,|x_1-x_2|$

{ удовл. усл. липш. с конст. q – нечто среднее между непр-ю и дифференцир-ю }

<u>Замеч.</u> $\exists\, S'(x)\;\exists$ в окр-ти корня $(x\in U_a(x_*))$, $|S'(x)|\le q$, $x\in U_a(x_*)\Rightarrow$
$\Rightarrow S(x)$ удовл. усл-ю Липшица.

Утв. Пусть ф-я $S(x)$ – липшиц-непрерывна в окр-ти иск-го корня: $x\in U_a(x_*)$ с $q\in(0,1)$
$\Rightarrow$ если выбрать $x_0\in U_a(x_*)$, то МПИ сходится со скоростью геом. прогрессии со знам-м q:
$|x_n-x_*|\le q^n|x_0-x_*|$.

Док-во (по индукции)
$x_0\in U_a(x_*)$
$\exists\, x_n\in U_a(x_*)$
Док, что $x_{n+1}\in U_a(x_*)$

Рассм. $|x_{n+1}-x_*|=|S(x_n)-S(x_*)|\underset{\text{усл-е липш.}}{\le} q\,|x_n-x_*|\Rightarrow$
$\Rightarrow x_{n+1}\in U_a(x_*)$ (связь между сосед. ит-ми линейная)

$\Rightarrow$ рассм. как реккур-ю:
$|x_n-x_*|\le q^n|x_0-x_*|$
$\Rightarrow x_{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} x_*$ ■

<u>Замеч.</u> Если $\exists\, S'(x)$ и $q\overset{df}{=}\max\limits_{x\in U_a(x_*)}|S'(x)|$, (*)
то при $0<q<1$ МПИ сходится.

<u>Замеч.</u> Другая часто исп-ся форма записи МПИ

(5) $\dfrac{x_{n+1}-x_n}{\tau}+f(x_n)=0$, $\tau>0$

Укажем, как выбирать τ, чтобы МПИ сходился.

Если выбрать $S(x)=x-\tau\cdot f(x)$, то $S(x_n)=x_{n+1}$
$\exists\,\exists f'(x)$, $x\in U_a(x_*)$
Ищем τ, при кот-х сх-ся.
$S'(x)=1-\tau\cdot f'(x)$
Найдём τ: $q<1$ (уд.(*)) $\Rightarrow |1-\tau f'(x)|<1$ $\forall x\in U_a(x_*)$, $M_1=\sup\limits_{x\in U_a(x_*)}|f'(x)|$

$-1<1-\tau M_1<1\Rightarrow \boxed{\tau<\frac{2}{M_1}}$

Метод Эйткина ускорения сходимости.

(6) $\exists\,\forall n\Rightarrow x_n-x_*\cong A\cdot q^n$

<u>Задача</u>: выразить x_* ч/з x_{n-1},x_n,x_{n+1}.
Рассм. при разных n 3 ур-ия:

$$\begin{cases}x_{n+1}-x_*=Aq^{n+1}\\ x_n-x_*=Aq^n\\ x_{n-1}-x_*=Aq^{n-1}\end{cases}\Rightarrow x_*=x_{n+1}-\underset{\text{ищем}}{Aq^{n+1}}$$

$(x_{n+1}-x_n)^2=A^2q^{2n}(q-1)^2$
$(x_{n+1}-2x_n+x_{n-1})=A(q^{n+1}-2q^n+q^{n-1})=Aq^{n-1}(q-1)^2$

вычтем $\Rightarrow Aq^{n+1}=\dfrac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}}$ – это аппр. 1-ой разн. произв.

$$\Rightarrow\boxed{x_*=x_{n+1}-\frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}}}$$

это аппроксимация второй разностн. произв. $\times h^2$

Это приближение существенно лучше.

§3. Метод Ньютона и метод секущих.

Недост. МПИ – медл. сходимость.
Решаем ур-е

(1) $f(x)=0$

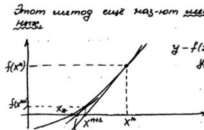
Задана окр-ть корня: $U_a(x_*)$
Обозн. x^n – n-я итерация.

$\exists\,\exists f'(x)\neq0$ при $x\in U_a(x_*)$

(2) $\Rightarrow\boxed{x^{n+1}=x^n-\dfrac{f(x^n)}{f'(x^n)}}$, $n=0,1,2,\dots$
x^0 – задано ($x^0\in U_a(x_*)$)
нач. приб. надо брать очень близко к корню

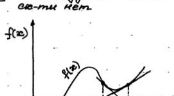
{ здесь $\tau(x)=\frac{1}{f'(x)}$ }

Этот метод ещё наз-ют <u>мет. касательных</u>.



$y-f(x^n)=f'(x^n)(x-x^n)$ – ур-е касательной

<u>Ex</u> если неудачно выбрать нач. прибл-е, сх-ти нет



$\Rightarrow$ зацикли-лись
$\Rightarrow$ сх-ти нет

<u>Модифицированный мет. Ньют.</u>
(чтобы избежать такой сит-ции)

(3) $x^{n+1}=x^n-\dfrac{f(x^n)}{f'(x^0)}$

Но: (3) сх-ся гораздо медленнее, чем (2).
(но мы не зациклимся).

Пок., как получ. ф-ла (2):
из <u>разложение Тейлора</u> и отбрасывание соотв-х членов.
x_* – корень: $f(x_*)=0$
Запишем разложение $f(x_*)$ в т. x:
$f(x_*)=f(x)+(x_*-x)f'(x)+\dots=0$
Заменим $x_*\to x^{n+1}$, $x\to x^n\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x^n)+(x^{n+1}-x^n)f'(x^n)=0\Rightarrow$ { в предпол-ии $f'(x^n)\neq0$ }

$\Rightarrow\boxed{x^{n+1}=x^n-\dfrac{f(x^n)}{f'(x^n)}}$, $n=0,1,\dots$, $x^0\in U_a(x_*)$.

24.03. Лекц. 13.

Сист. нелин. ур-ий

(4) $\begin{cases}f_1(x_1,x_2)=0\\ f_2(x_1,x_2)=0\end{cases}$

$\exists\,(x_1^*,x_2^*)$ – решение (4):
$f_1(x_1^*,x_2^*)=0$; $f_2(x_1^*,x_2^*)=0$
разложим по ф-ле Тейлора:

$f_1(x_1^*,x_2^*)=f_1(x_1,x_2)+\dfrac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}(x_1^*-x_1)+\dfrac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}(x_2^*-x_2)+\dots\dots=0$

$f_2(x_1^*,x_2^*)=f_2(x_1,x_2)+\dfrac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}(x_1^*-x_1)+\dfrac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}(x_2^*-x_2)+\dots=0$

Сделаем замену $x_i\to x_i^n$, $x_i^*\to x_i^{n+1}$

$$\begin{cases}f_1(x_1^n,x_2^n)+\dfrac{\partial f_1(x_1^n,x_2^n)}{\partial x_1}(x_1^{n+1}-x_1^n)+\dfrac{\partial f_1(x_1^n,x_2^n)}{\partial x_2}(x_2^{n+1}-x_2^n)=0\\[2mm] f_2(x_1^n,x_2^n)+\dfrac{\partial f_2(x_1^n,x_2^n)}{\partial x_1}(x_1^{n+1}-x_1^n)+\dfrac{\partial f_2(x_1^n,x_2^n)}{\partial x_2}(x_2^{n+1}-x_2^n)=0\end{cases}$$

Запишем эту систему в матричном виде.

Обозн. $x^n=\begin{pmatrix}x_1^n\\x_2^n\end{pmatrix}$, $x^{n+1}=\begin{pmatrix}x_1^{n+1}\\x_2^{n+1}\end{pmatrix}$, $f(x^n)=\begin{pmatrix}f_1(x^n)\\f_2(x^n)\end{pmatrix}$,

$\mathcal{J}(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}&\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}&\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}\end{pmatrix}$ – матр. из частн. производных

$\Rightarrow$ система примет вид

(5) $\boxed{f(x^n)+\mathcal{J}(x^n)(x^{n+1}-x^n)=0}$, $n=0,1,\dots$
x^0 – нач. прибл-е

Если $\exists\,\mathcal{J}^{-1}(x^n)$ (здесь она $\exists$), то

(6) $\boxed{x^{n+1}=x^n-\mathcal{J}^{-1}(x^n)\cdot f(x^n)}$

$\exists$ задана сист. из m ур-ий:
$f_1(x_1,\dots,x_m)=0$
…
$f_m(x_1,\dots,x_m)=0$

$\Rightarrow$ анал-е действие породит м-цу
$\mathcal{J}(\bar x)=(f_{ij})$, $i,j=\overline{1,m}$, где $\bar x=(x_1,\dots,x_m)^T$
$f_{ij}=\dfrac{\partial f_i(\bar x)}{\partial x_j}$ $\Rightarrow$ получим ту же формулу зап. (5) мет. Ньют.

Зам. М-ца $\mathcal{J}$ вычисл-ся на кажд. итерации и это непростая процедура. Поэтому обычно решают именно (5), не обращая $\mathcal{J}$, вводя вектор $v^{n+1}=x^{n+1}-x^n$
$\Rightarrow f(x^n)+\mathcal{J}(x^n)v^{n+1}=0\Rightarrow$ нах. $v^{n+1}\Rightarrow$
$\Rightarrow x^{n+1}=v^{n+1}+x^n$

Здесь тоже часто применяют модиф-ый метод Ньютона:
$x^{n+1}=x^n-\mathcal{J}^{-1}(x^0)f(x^n)$, т.е. $\mathcal{J}^{-1}$ нах. только один раз для нач. приближения

<u>Метод секущих (хорд).</u>

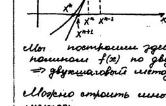
Рассм-ем для 1-го ур-ия { для сист. – анал. }
Мет. Ньют:
$x^{n+1}=x^n-\dfrac{f(x^n)}{f'(x^n)}$, $n=0,1,\dots$, x^0 – нач. прибл.

Заменим $f'(x^n)$ дискретным аналогом
$f'(x^n)=\dfrac{f(x^n)-f(x^{n-1})}{x^n-x^{n-1}}$

Подст. это в <u>метод Ньютона</u>:

(7) $\boxed{x^{n+1}=x^n-\dfrac{x^n-x^{n-1}}{f(x^n)-f(x^{n-1})}f(x^n)}$, $n=1,2,\dots$

Для начала счёта нам надо два значения: x^0,x^1 – нач. усл-я.
Получим идеологию многошаговых итер. методов.
Метод секущих требует для нах-я x^{n+1}: x^n и $x^{n-1}\Rightarrow$
этот метод двухшаговый



Мы построили здесь интерполяц. полином $f(x)$ по двум точкам
$\Rightarrow$ двухшаговый метод.

Можно строить многошаговые итерац. методы.

§4. Сходимость метода Ньютона.
(достаточное условие)
Оценка скорости сходимости метода Ньютона.

Рассм. нелин. ур-е

(1) $f(x)=0$, $\exists$ задана окр-ть корня $U_a(x_*)$
x_* – корень;
требование на гладкость $f(x)$ – $\exists f'''(x)$

(2) <u>Метод Ньют</u>: $x^{n+1}=x^n-\dfrac{f(x^n)}{f'(x^n)}$, $n=0,1,2,\dots$, $x^0\in U_a(x_*)$

<u>Почему мет. (2) сх-ся?</u>
(2) можно рассм. как МПИ:

(3) $x^{n+1}=S(x^n)$, $n=0,1,\dots$

(4) где $S(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Продифф-ем $S(x)$ (в предп-ии $\exists f''(x)$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow S'(x)=1-\dfrac{(f'(x))^2-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=\dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$

(5) $\Rightarrow S'(x)=\dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$

$\Rightarrow\{S'(x_*)=0\}$, т.к. $f(x_*)=0$

Для МПИ было: если $|S'(x)|\le q<1$, то МПИ сходится

Из $S'(x_*)=0\Rightarrow\exists$ окрестность $U_a(x_*)$, $\Rightarrow$ где $|S'(x)|<1$
(со скор. геом. прогр.)
$\Rightarrow$ метод Ньютона сходится ■

Теперь <u>оценим скорость сх-ти</u> (точнее).

Введём погреш-ть $z_n=x^n-x_*$ – погрешность на n-ой итерации
$\Rightarrow z_{n+1}=x^{n+1}-x_*=S(x^n)-S(x_*)$

Рассм. разность { $S(x_*)=x_*$ }
$z_{n+1}=S(z_n+x_*)-S(x_*)\underset{\text{тейлор}}{=}S(x_*)+\underset{=0}{S'(x_*)}z_n+0{,}5S''(\tilde x^n)z_n^2-S(x_*)$

$\Rightarrow\boxed{z_{n+1}=0{,}5S''(\tilde x^n)z_n^2}$, $\tilde x^n=x_*+\theta z_n$, $|\theta|<1$

(6) <u>Пусть $\exists M>0$: $|0{,}5S''(\tilde x^n)|\le M$</u>

$\Rightarrow|z_{n+1}|\le M|z_n^2|\Rightarrow M|z_{n+1}|\le(M|z_n|)^2$

(7) Обозн. $v_n=M|z_n|\Rightarrow\boxed{v_{n+1}\le v_n^2}\Rightarrow$
$\Rightarrow$ это и означает ту самую квадратичную связь

Применяем (7) как реккурентную $\Rightarrow$
$\Rightarrow v_n\le v_0^{2^n}\Rightarrow$
$\Rightarrow M|z_n|\le(M|z_0|)^{2^n}\Rightarrow$
$\Rightarrow |z_n|\le\frac{1}{M}(M|z_0|)^{2^n}$

Обозн. $M|z_0|=q\Rightarrow|z_n|\le\frac{1}{M}q^{2^n}$
Выберем $q<1\Rightarrow M|z_0|<1\Rightarrow|z_0|<\frac{1}{M}\Rightarrow$

(8) $\Rightarrow|x^0-x_*|<\frac{1}{M}\Rightarrow$ нач. приближение выбираем в соотв. с усл. (8) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ конечная оценка имеет вид:

(9) $\boxed{|x^n-x_*|\le\frac{1}{M}(M|x^0-x_*|)^{2^n}}$ ■

Утв (об оценке скор. сход-ти)
Пусть $\exists$ конст. M, удовл. усл-ю

(10) $0{,}5\left|\left(\dfrac{f\cdot f''}{(f')^2}\right)'\right|\le M$ { это так, если $\exists f'''$ }

для всех $x\in U_a(x_*)$, x_* – корень, $a=a(M)$.
Пусть нач. приближение x^0 удовл. усл. (8): $|x^0-x_*|<\frac{1}{M}$.

$\Rightarrow$ итер. мет. Ньют. (2) реш-ия ур-ия (1) сходится и имеет место оценка (9).

<u>Зам.</u> 1) если мет Ньют. сх-ся, то он сх-ся очень быстро (за 3-4 итерации)
2) нач. приближение надо выбирать близко к корню.

Пок. теперь, что <u>у модиф-го мет. Ньют. сх-ть более медленная</u> (но быстрее МПИ)
Для мод. МН $\Rightarrow S'(x_*)=1-\dfrac{f'(x_*)}{f'(x^0)}\Rightarrow$
$\Rightarrow S'(x_*)$ не будет нулём $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ сходимость линейная
(анал. для мод. мет. сек-щих)

Т.о., ит. мет. Ньют. – самый эфф. мет. для решения систем нелин. ур-ий

Глава IV. Разностные методы решения задач математической физики.

§1. Разностные схемы для I-ой краевой задачи уравнения теплопроводности.

Рассм I кр. з. ур. теп:

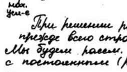
(1) $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\quad 0<x<1,\;0<t\le T\end{cases}$ { T – любое }
линейное ур-е тепл-ти

Задаим краевые (граничные) усл-ия I-го рода:

(2) $\begin{cases}u(0,t)=\mu_1(t),\\ u(1,t)=\mu_2(t),\quad 0\le t\le T\end{cases}$

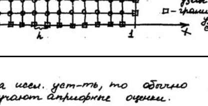
Начальное условие:

(3) $u(x,0)=u_0(x)$, $0\le x\le 1$



Надо найти ф-цию, непр-ю в замкн. обл., уд. (1)-(3).

При решении разностной задачи прежде всего строят <u>сетку</u>.
Мы будем рассм. только сетки с постоянным (равном-м) шагом.



$\tau,h>0$
о – внутр-е узлы сетки
□ – граничные узлы сетки

$w_h=\{x_i=i\cdot h,\;i=\overline{1,N-1},\;Nh=1\}$ – сетка { h – шаг сетки } x_i – узлы
$w_\tau=\{t_j=j\cdot\tau,\;j=\overline{1,j_0},\;j_0\tau=T\}$ τ – шаг сетки
$\overline{w_h}=\{x_i=i\cdot h,\;i=\overline{0,N},\;Nh=1\}$ – замыкание
$\overline{w_\tau}=\{t_j=j\cdot\tau,\;j=\overline{0,j_0},\;j_0\tau=T\}$

$w_{\tau h}=w_\tau\times w_h$ узлы наз-ют слоями.
$\overline{w_{\tau h}}=\overline{w_\tau}\times\overline{w_h}$

<u>Обозн.</u> $u_i^n=u(x_i,t_n)$, $(x_i,t_n)\in\overline{w_{\tau h}}$
$y_i^n=y(x_i,t_n)$, $(x_i,t_n)\in\overline{w_{\tau h}}$
$f_i^n=f(x_i,t_n)$

30.03.04. Лекц 14.

От выбора спос. апр-ции зависит кач-во разностн. схемы.

1°. Явная разностн. схема.

(4) $\dfrac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\dfrac{y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n}{h^2}+f(x_i,t_n)$, $(x_i,t_n)\in w_{\tau h}$

(5) $y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1})$, $t_{n+1}\in\overline{w_\tau}$
$y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1})$,

(6) $y_i^0=u_0(x_i)$, $x_i\in\overline{w_h}$

(4)-(6) – это сист лин. алг. ур-ий отн. y.
df (разностн. сх. для реш-ия зад. (1)-(3))

<u>Круг вопросов отн. разн. схем</u>:
1) погрешность аппроксимации разностной схемы (РС)
{ (4)-(6) – дискретн. аналог (1)-(3). РС обязат. должна с какой-то степ. приближать исходную }

задача – получить сх-ть и уст-ть в более сильной метрике (норме).
{ поточечн. близость сильнее, чем сх. в среднекв. норме }

2) существование и единств-ть решения разностной задачи

3) алгоритм нахождения разностного решения

4) устойчивость разностн. схемы – ключевой вопр.
Это чисто внутр. св-во РС.

5) сходимость разн. схемы к решению исх. задачи и порядок точности разн. схемы
$y_i^n\to u_i^n$ при $\tau,h\to0$

/* аппрокс-ция произв. должна быть связ. с аппр. ур-ия */

Введём шаблон РС.
<u>Слой</u> – совок-ть всех узлов при пост. t_n

$$\begin{array}{l}n+1\;\text{———}\;i\;\text{———}\;t_{n+1}\\ n\;\text{—}\;i-1\;\;i\;\;i+1\;\text{—}\;t_n\end{array}$$

Решение будет идти по слоям снизу вверх.
Какие узлы мы исп-ли?
$\Rightarrow$ говорят, что <u>РС записана на четырёхточечном шаблоне</u>

<u>Погреш-ть аппр-ции</u> мы будем рассматривать <u>на решении</u>.

$\dfrac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}\approx\dot u(x_i,t_n)+O(\tau)$, когда u – дост. гладкая
аппр. 1-ой разн. произв. по t

Аппроксимация по простр. перем-ой:
$\dfrac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{h^2}\approx u''(x_i,t_n)+O(h^2)$

$\Rightarrow$ разн. ур-е (4) приближает исходное с погрешностью
$\psi_i^n=O(\tau+h^2)$

Запишем <u>алгоритм нах-ия разн. решения.</u>
Пусть найдено y_i^n на t_n-слое

$\Rightarrow y_i^{n+1}=y_i^n+\dfrac{\tau}{h^2}(y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n)+\tau f_i^n$, $i=\overline{1,N-1}$
$y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1})$, $y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1})$ — $n=\overline{0,j_0}$

$\Rightarrow$ реш-е на $(n+1)$-м слое нах-ся по явной формуле

Обозн. $\gamma=\frac{\tau}{h^2}$.
Явная разн. схема устойчива, если

(*) $\gamma=\frac{\tau}{h^2}\le0{,}5$

$\Rightarrow$ сх-ть в сильной норме C обеспечена.

<u>ex</u> $T=1$, $h=10^{-2}\Rightarrow\tau$ надо выбирать: $\tau\le0{,}5\cdot10^{-4}$
$\Rightarrow$ надо 20000 шагов

Сходимость.

Надо выбрать норму.

$\|y^n\|_C=\max\limits_{0\le i\le N}|y_i^n|$ – дискр.
$\|u\|_C=\max\limits_{0\le x\le1}|u(x,t)|$ – непр. } норма C

Мы док-ем сх-ть именно в этой норме.
Для иссл. сх-ти введём сеточную ф-цию

(8) $z_i^n=y_i^n-u_i^n$ – <u>погрешность разностного решения</u> (не погр. апп-ции)

<u>Два подх.</u>: · из дискр. в непр.
· из непр. в дискр. (v) (проектим в дискр. пр-во)

Выразим $y_i^n=z_i^n+u_i^n$ и подставим в (4)

Получим дискр. задачу для погреш-ти:

(9) $\dfrac{z_i^{n+1}-z_i^n}{\tau}=\dfrac{z_{i+1}^n-2z_i^n+z_{i-1}^n}{h^2}+\psi_i^n$, $(x_i,t_n)\in w_{\tau h}$,

(10) где $\psi_i^n=-\dfrac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+\dfrac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{h^2}+f_i^n$

Опр. Ф-ция ψ_i^n наз. <u>погреш-ю аппроксимации разн. сх. (4)-(6) на решении</u> исх. задачи (1)-(3)

$\psi_i^n=O(\tau+h^2)$

(11) $z_0^{n+1}=z_N^{n+1}=0$ (краев. усл.)
(12) $z_i^0=0$ (нач. усл.)

Разрешим z_i^{n+1} на $(n+1)$-м слое:
$z_i^{n+1}=z_i^n+\gamma(z_{i+1}^n-2z_i^n+z_{i-1}^n)+\tau\psi_i^n$
для сх-ти РС к реш. зад. дост. усл (7)

$\|z^n\|_C\underset{\text{обозн.}}{=}\|z^n\|=\max\limits_{0\le i\le N}|z_i^n|$

$\Rightarrow z_i^{n+1}=(1-2\gamma)z_i^n+\gamma(z_{i+1}^n+z_{i-1}^n)+\tau\psi_i^n$
$|z_i^{n+1}|\le\underset{\ge0\,(7)}{(1-2\gamma)}|z_i^n|+\gamma(|z_{i+1}^n|+|z_{i-1}^n|)+\tau|\psi_i^n|$
$|z_i^{n+1}|\le(1-2\gamma)\|z^n\|_C+2\gamma\|z^n\|_C+\tau\|\psi^n\|_C$
Это справедливо при всех $i\Rightarrow$
$\Rightarrow$ можно замен. на $\|\cdot\|$

(13) $\Rightarrow\|z^{n+1}\|_C\le\|z^n\|_C+\tau\|\psi^n\|_C$

$\Rightarrow$ если (7) вып, то вып. оценка (13).
Рассм. её как реккур-ю:

(**) $\|z^{n+1}\|_C\le\underset{0}{\|z^0\|_C}+\sum\limits_{k=0}^{n}\tau\|\psi^k\|_C$

(*) $\Rightarrow\|z^{n+1}\|_C\le\sum\limits_{k=0}^{n}\tau\|\psi^k\|_C$

т.к. $\psi_i^n=O(\tau+h^2)\Rightarrow\exists M>0$ // <u>M не завис. от τ и h</u> //:
$\|\psi^n\|_C\le M(\tau+h^2)$

подст. в (*) $\Rightarrow\|z^{n+1}\|_C\le M\underbrace{\sum\limits_{k=0}^{n}\tau}_{t_n}(\tau+h^2)$

введём $M_1=TM$

(14) $\Rightarrow\|z^{n+1}\|_C\le M_1(\tau+h^2)$
M_1 не завис. от τ и h

$\Rightarrow\|y^{n+1}-u^{n+1}\|_C\to0$ $\;\tau\to0,\;h\to0$

это означает сх-ть к решению зад (1)-(3) с 1-м порядк. по τ и 2-м по h

Когда иссл. уст-ть, то обычно получают априорные оценки.

Устойчивость.

Рассм. разн. сх. при нулевых краевых усл-ях

(15) $\overset{(**)}{\Rightarrow}\|y^{n+1}\|_C\le\underset{\text{нач. усл.}}{\|u_0\|_C}+\underbrace{\sum\limits_{k=0}^{n}\tau\|f^k\|_C}_{\text{прав. ч.}}$

Эта оценка наз. <u>априорной оценкой</u>
Она означает <u>уст-ть разн. решение по нач. усл. и правой части.</u>

$\Rightarrow\|y^n\|_C\le M_1\|u_0\|_C+M_2\|f\|_C$, M_1 и M_2 не зависят от τ и h.

Докажем, что усл. (7) явл. и необходимым.
Если нет ограничений на шаге сетки, то сх-ть абсолютная.
У нас – условная.

Пок, что если (7) нарушено, то решение будет неогр. возрастать.

Необх-ть Для этого рассм. однор. ур-е:

(16) $\dfrac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\dfrac{y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n}{h^2}$

Если реш. одн. неогр. возр $\Rightarrow$ и реш. неодн. тоже неогр. возр (т.к. оно явл. Σ)

Решение ищем в виде

(17) $y_j^n=q^ne^{ijh\varphi}$, где
$i^2=-1$, h – шаг, $\varphi\in R$ (действит-е), q – комплексное число

Говорят, что это отдельная гармоника.
Пок, что если (7) наруш., то (17) неогр. возр.

если $|q|>1\Rightarrow y_j^n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$

Найдём (из (16),(17)) $q=1+\gamma(e^{ih\varphi}-2+e^{-ih\varphi})\overset{?}{=}$
$e^{ih\varphi}=\cos h\varphi+i\sin h\varphi$

$=1+\gamma(2\cos h\varphi-2)=1+2\gamma(\cos h\varphi-1)=$
$=1-4\gamma\sin^2\frac{h\varphi}{2}$

посмотрим при каких γ $|q|>1$ (т.е. $q<-1$)
$\Rightarrow 1-4\gamma\sin^2\frac{h\varphi}{2}<-1\Rightarrow$
$2\gamma\sin^2\frac{h\varphi}{2}>1\Rightarrow\gamma>\dfrac{1}{2\sin^2\frac{h\varphi}{2}}$

$\Rightarrow$ при $\gamma>\frac12$ решение (17) неогр. возрастает
$\Rightarrow$ решение не устойчиво

2° Чисто неявная разностная схема
(схема с опережением)
Рассм. задачу (1)-(3).

(4) $\dfrac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\dfrac{y_{i+1}^{n+1}-2y_i^{n+1}+y_{i-1}^{n+1}}{h^2}+f(x_i,t_{n+1})$, $(x_i,t_n)\in w_{\tau h}$

(5) $y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1})$, $t_{n+1}\in\overline{w_\tau}$
$y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1})$

(6) $y_i^0=u_0(x_i)$, $x_i\in\overline{w_h}$

Шаблон этой схемы:

$$\begin{array}{l}\text{—}\;i-1\;\;i\;\;i+1\;\text{—}\;n+1\\ \text{————}\;i\;\text{————}\;n\end{array}\quad\text{слои}$$

$\Rightarrow$ 4-х точечный шаблон

Погреш-ть $\psi_i^n = O(\tau+h^2)$

Ур-е трёхточечное ⇒ м-ца будет иметь трёхдиаг. вид и решать её будем методом прогонки.

$\gamma=\frac{\tau}{h^2}$

(7) $\gamma y_{i+1}^{n+1} - (1+2\gamma) y_i^{n+1} + \gamma y_{i-1}^{n+1} = -F(y_i^n)$, $i=\overline{1,N-1}$

$y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1})$, $y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1})$ $F(y_i^n)=y_i^n+\tau f_i^{n+1}$

$y_i^0=u_0(x_i)$

Это СЛАУ с матрицей

$$A=\begin{pmatrix} -(1+2\gamma) & \gamma & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma & -(1+2\gamma) & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma & -(1+2\gamma) & \gamma & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \ddots & \gamma \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \gamma & -(1+2\gamma) \end{pmatrix}$$

⇒ это м-ца со строгим диаг. преобл ⇒
⇒ det $A \ne 0$ ⇒ СЛАУ имеет ед. реш-е при ∀ прав. частях

31.03.04 Лекц. 15

Введём сеточн. ф-цию
$z_i^n = y_i^n - u_i^n$ — погреш. разн. схемы

(8) ⇒ $\frac{z_i^{n+1}-z_i^n}{\tau} = \frac{z_{i+1}^{n+1}-2z_i^{n+1}+z_{i-1}^{n+1}}{h^2}+\psi_i^n$ $(x_i,t_n)\in\omega_{\tau h}$

(9) $z_0^{n+1}=0$, $z_N^{n+1}=0$, $t_n\in\overline{\omega_\tau}$

(10) $z_i^0=0$, $x_i\in\overline{\omega_h}$

Погр. аппр. разн. сх. на реш. задачи (1)-(3) $\psi_i^n = -\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{h^2}+f_i^{n+1}$

Задача. Док., что $\psi_i^n=O(\tau+h^2)$

Получим априорную оц. из принципа максимума (для дискр.) (это и будет означать устойчивость).

Фиксируем узел i_0, в котором

$$|z_{i_0}^{n+1}| = \max_{1\le i\le N}|z_i^{n+1}| = \|z^{n+1}\|_C$$

Перепишем ур-е (8) как трёхточ.:

$(1+2\gamma) z_i^{n+1} = \gamma z_{i+1}^{n+1} + \gamma z_{i-1}^{n+1} + \tau\psi_i^n + z_i^n$

Запишем это ур-е в i_0-м слое и возьмём по модулю:

$(1-2\gamma)|z_{i_0}^{n+1}| \le \gamma|z_{i+1}^{n+1}|+\gamma|z_{i-1}^{n+1}|+\tau|\psi_i^n|+|z_i^n|$

Заменим в пр. ч. на норму — нер-во усилится

$(1+2\gamma)|z_{i_0}^{n+1}| \le 2\gamma\|z^{n+1}\|_C + \tau\|\psi^n\|_C + \|z^n\|_C$

⇒ $(1+2\gamma)\|z^{n+1}\|_C \le 2\gamma\|z^{n+1}\|_C + \tau\|\psi^n\|_C + \|z^n\|_C$

⇒ $\|z^{n+1}\|_C \le \|z^n\|_C + \tau\|\psi^n\|_C$

Используем эту оц. как рекк. и получим погр-ть РС ч/з погр. аппр-ции.

⇒ $\|z^{n+1}\|_C \le \underset{0}{\|z^0\|_C} + \sum_{k=0}^{n} \tau\|\psi^k\|_C$ ⇒

Т.к. $\psi_i^n = O(\tau+h^2)$, то ∃ $M>0$, не завис от τ и h,

⇒ $\|\psi^k\| \le M(\tau+h^2)$

⇒ $\|z^{n+1}\|_C \le M_1(\tau+h^2)$, где $M_1 = M\cdot t_n \le MT$ не зав. от τ и h

⇒ $\|z^{n+1}\|_C \to 0$ $\tau\to0, h\to0$ ⇒ имеет место абс. сх-ть с 1-м пор. по τ и 2-м по h

Если рассм. исх. зад. с нул. н.у., то

$\|y^{n+1}\|_C \le \|u_0\|_C + \sum_{k=0}^{n}\tau\|f^k\|_C$

Это априорная оц.
Она озн. уст-ть по нач. усл. и прав. ч.

Зам. в число неяв. РС τ выбир. ≈ h.

3° Симметричная разностная схема (сх. Кранка – Никольсона).

Введём

$y_{\bar{x}x,i}^m = \frac{y_{i+1}^m - 2y_i^m + y_{i-1}^m}{h^2}$ — аппроксимация 2-ой разн. произв в узле (x_i,t_m)

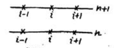
⇒ симм. РС запис-ся так:

(4) $\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau} = 0.5(y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + y_{\bar{x}x,i}^{n}) + f(x_i, t_n+0.5\tau)$ рассм. в полуцелое

(5) $y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1})$, $y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1})$

(6) $y_i^0 = u_0(x_i)$, $x_i\in\overline{\omega_h}$

Рассм. двухсл. шаблон



шаблон типа ящик (шеститоч. шаблон)

симм. РС — тоже неявная
реш-е ∃①, алг-м – метод прогонки

Рассм. подробно вопросы уст-ти и сх-ти симм. РС.
Нам бы хотелось получать оценки в более сильной метрике.
Но для симм. РС – это очень слож. зад. (предмет докт. диссертации).

Поэтому мы будем рассм. в более слабой (среднекв.) норме.
Подход – метод Фурье (метод разделения пер-х).

Задача на собств. знач. (Штурма-Лиувилля)

Рассм. дифф. разн. зад.

(7) $\begin{cases}\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u(x)=0 & 0<x<1\\ u(0)=0,\ u(1)=0,\ u(x)\not\equiv0\end{cases}$

Ищутся такие зн. λ и с.ф. $u(x)$, уд. (7)

С.з. $\lambda_k=(\pi k)^2$, $k=1,2,\dots$ ⇒ все с.з. возрастают: $0<\lambda_1<\lambda_2<\dots$

∀ λ_k соотв. одна ф-ция $u_k(x)=\sqrt2\sin\pi kx$

Т.о., Реш-ем зад. (7) явл. с.з. $\lambda_k=(\pi k)^2$ и с.ф. $u_k(x)=\sqrt2\sin\pi kx$.

Рассм. $f\in L_2$ (гильбертово пр-во): $\int_0^1 f^2(x)dx<\infty$ (инт-мы с квадратом)

Введ. скал. произв.: $\forall g,f\in L_2 \Rightarrow (f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$

⇒ норма $\|f\|_{L_2}=\sqrt{(f,f)}=\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{1/2}$ — среднекв. норма

Если мы введем скал. пр-е, то $\{u_k\}_1^\infty$ образуют ортонорм. базис: $(u_k,u_l)=\delta_{kl}$

⇒ $\forall f\in L_2$ можно предст. в виде ряда Фурье $f(x)=\sum_{k=1}^\infty c_ku_k(x)$.

⇒ справедливо рав-во Парсеваля

$\|f\|_{L_2}^2=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2$

Оно очень важно с т.з. получения устойчивости задачи.

Теперь переходим к разностн. зад. Шт.-Лиув.

(8) $\begin{cases} y_{\bar xx,i}+\lambda y_i=0 & 0<i<N,\ 0<x_i<1,\ y_i\not\equiv0\\ y_0=y_N=0\end{cases}$

$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+\lambda y_i=0$ ⇒

(*) $y_{i+1}+y_{i-1}=(2-\lambda h^2)y_i$

Решение будем искать в виде $y(x_i)=y_i=\sin\alpha x_i$, $\alpha\in\mathbb R$

⇒ $y_{i+1}+y_{i-1}=\sin\alpha(x_i+h)+\sin\alpha(x_i-h)=$
$=2\sin\alpha x_i\cos\alpha h$

Подст. это в (*) ⇒

⇒ $2\sin\alpha x_i\cos\alpha h=(2-\lambda h^2)\sin\alpha x_i$ ⇒

⇒ {сокр. на $\sin\alpha x_i\ne0$} ⇒

⇒ $2\cos\lambda h=2-\lambda h^2$ ⇒ $\lambda h^2=2(1-\cos\alpha h)=2\cdot2\sin^2\frac{\alpha h}{2}$

⇒ $\lambda=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha h}{2}$ ⇒ все $\lambda>0$

$y_N=y(1)=\sin\alpha=0$ ⇒ $\alpha=\pi k$

⇒ $\lambda_k=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi kh}{2}$, $k=\overline{1,N-1}$ — соб. зн.

Соб. ф-ции $u_k(x_i)=\sqrt2\sin\pi kx_i$, $x_i\in\omega_h$

Причём $0<\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_{N-1}$

Т.о., мы получили с.з. и с.ф. зад. Ш-Л.

Введём сеточное конечномер. пр-во H: $\dim H=N-1$
Это пр-во сет. ф-ций $y_0=y_N=0$.
Они будут суммируемы с квадратом.

Введём скал. пр-е сет. ф-ций $\forall z,y\in H$ $(z,y)=\sum_{k=1}^{N-1}z_ky_kh$

⇒ $\|y\|_{L_2(\omega_h)}=\left(\sum_{k=1}^{N-1}y_k^2h\right)^{1/2}$

⇒ $(u_k(x_i),u_l(x_i))=\delta_{kl}$, т.е. совок-ть функций $\{u_k(x)\}_1^{N-1}$ — ОНБ пр-ва H

Разложим ∀ ф-цию по ОНБ:
$\forall y\in H$ $y(x)=\sum_{k=1}^{N-1}c_ku_k(x_i)$, $x_i\in\overline{\omega_h}$

Т.к. есть ОНБ, имеет место рав-во Парсеваля $\|y\|^2_{L_2(\omega_h)}=\sum_{k=1}^{N-1}c_k^2$

/* пр-во сеточных ф-ций сумм-х с квадратом */

Именно из рав-ва Парсеваля мы получим оценку уст-ти.

Будем применять метод Фурье (МРП).

∃ $\mu_k(x_i)=\sqrt2\sin\pi kx_i$ — соб. функц. ($x_i\in\omega_h$)

Для погр-ти имеем задачу ⇒

(9) ⇒ $\frac{z_i^{n+1}-z_i^n}{\tau}=0{,}5(z^{n+1}_{\bar xx,i}+z^n_{\bar xx,i})+\psi_i^n$

(10) $z_0^{n+1}=z_N^{n+1}=0$

(11) $z_i^0=u_0(x_i)$

где $\psi_i^n=-\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+0{,}5(u^{n+1}_{\bar xx,i}+u^n_{\bar xx,i})+f_i^{n+\frac12}$ — погр. аппроксимации на реш-ии

Задача Док, что $\psi_i^n=O(\tau^2+h^2)$

$\|z^n\|_{L_2(\omega_h)}=\|z^n\|$ (обозначим) это среднекв. норма.

Ищем частн. реш-е зад. (9)-(11) в виде

(*) $z_i^n=\sum_{k=1}^{N-1}c_k(t_n)\mu^{(k)}(x_i)\not\equiv0$

⇒ $\psi_i^n=\sum_{k=1}^{N-1}\psi^{(k)}(t_n)\mu^{(k)}(x_i)$ $\mu^{(k)}$ – базис из соб. ф-ций

06.04.04 Лекц. 16

$\overset{(9)}{\Rightarrow}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{c_k(t_{n+1})-c_k(t_n)}{\tau}\right)\mu^{(k)}(x_i)=0{,}5\left(\sum_{k=1}^{N-1}c_k(t_{n+1})+c_k(t_n)\right)\mu^{(k)}_{\bar xx,i}+\sum_{k=1}^{N-1}\psi^{(k)}(t_n)\mu^{(k)}(x_i)$

⇒ $\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{c_k(t_{n+1})-c_k(t_n)}{\tau}-\psi^{(k)}(t_n)\right)\mu^{(k)}(x_i)=$
$=0{,}5\left(\sum_{k=1}^{N-1}(c_k(t_{n+1})+c_k(t_n))\right)\mu^{(k)}_{\bar xx}(x_i)$

⇒ {поделим} ⇒

⇒ $\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\frac{c_k(t_{n+1})-c_k(t_n)}{\tau}-\psi^{(k)}(t_n)}{0{,}5(c_k(t_{n+1})+c_k(t_n))}=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\mu^{(k)}_{\bar xx}(x_i)}{\mu^{(k)}(x_i)}=-\lambda_k$

⇒ $\mu^{(k)}_{\bar xx,i}=-\lambda_k\mu_i^{(k)}$ ⇒

⇒ $\begin{cases}\mu^{(k)}_{\bar xx,i}+\lambda_k\mu_i^{(k)}=0, & i=\overline{1,N-1}\\ \mu_0=\mu_N=0\end{cases}$ — задача Штурма-Лиув.

⇒ Ур-е для $c_k(t_n)$

$\begin{cases}\frac{c_k(t_{n+1})-c_k(t_n)}{\tau}-\psi^{(k)}(t_n)=-\lambda_k 0{,}5(c_k(t_{n+1})+c_k(t_n))\\ c_k(0)=0 \quad \text{// на нулевом слое}\end{cases}$

⇒ $\frac{c_k(t_{n+1})-c_k(t_n)}{\tau}+0{,}5\lambda_k(c_k(t_{n+1})+c_k(t_n))=\psi^{(k)}(t_n)$

⇒ $(1+0{,}5\tau\lambda_k)c_k(t_{n+1})-(1-0{,}5\lambda_k\tau)c_k(t_n)=\tau\psi^{(k)}(t_n)$

⇒ $\underset{\text{погр-ть на (n+1)-ом слое}}{c_k(t_{n+1})}=\frac{1-0{,}5\tau\lambda_k}{1+0{,}5\tau\lambda_k}c_k(t_n)+\frac{\tau}{1+0{,}5\tau\lambda_k}\underset{\text{погр. аппр-ции}}{\psi^{(k)}(t_n)}$

Введём $q_k=\frac{1-0{,}5\lambda_k\tau}{1+0{,}5\lambda_k\tau}$, $|q_k|\le1$

(**) ⇒ $\boxed{c_k(t_{n+1})=q_kc_k(t_n)+\frac{\tau}{1+0{,}5\tau\lambda_k}\psi^{(k)}(t_n)}$

Теперь можем начать получать оценку

$\|z^{n+1}\|_{L_2(\omega_h)}\le\|z^n\|_{L_2(\omega_h)}+\tau\|\psi^n\|_{L_2(\omega_h)}$

(*) ⇒ $z_i^{n+1}=\sum_{k=1}^{N-1}c_k(t_{n+1})\mu^{(k)}(x_i)\overset{(**)}{=}\underbrace{\sum_{k=1}^{N-1}q_kc_k(t_n)\mu^{(k)}(x_i)}_{v_i^n\ \text{(обозн.)}}+$
$+\underbrace{\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\tau}{1+0{,}5\tau\lambda_k}\psi^{(k)}(t_n)\mu^{(k)}(x_i)}_{w_i^n}$

⇒ $\|z^{n+1}\|_{L_2(\omega_h)}\le\|v^n\|_{L_2}+\|w^n\|_{L_2}$

/* будем исп-ть рав-во Парсеваля; если оно не вып. – т.е. нет базиса – то менее */

$\|v^n\|^2_{L_2(\omega_h)}=\sum_{k=1}^{N-1}q_k^2c_k^2(t_n)\le\sum_{k=1}^{N-1}c_k^2(t_n)=\|z^n\|^2_{L_2(\omega_h)}$ на n-м слое

$\|w^n\|^2_{L_2(\omega_h)}=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\tau^2}{(1+0{,}5\tau\lambda_k)^2}(\psi^{(k)}(t_n))^2\le\sum_{k=1}^{N-1}\tau^2(\psi^{(k)}(t_n))^2$ ⊜

⊜ $\tau^2\|\psi^n\|^2_{L_2(\omega_h)}$

(***) Т.о., $\boxed{\|z^{n+1}\|_{L_2(\omega_h)}\le\|z^n\|_{L_2}+\tau\|\psi^n\|_{L_2}}$

Мы получ. эту оц. без огр-ий на шаг сетки ⇒ сх-ть и устойчивость будет абсолютной.

Зам. такие обр. можно исслед-ть ∀ РС при ∀σ {в L_2, а в C – не всегда}

⇒ {рассм. (***) как рекк.} ⇒

(12) ⇒ $\|z^{n+1}\|_{L_2(\omega_h)}\le\underset{0}{\|z^0\|_{L_2}}+\sum_{j=0}^{n}\tau\|\psi^j\|_{L_2(\omega_h)}$

⇒ {т.к. $\|\psi^j\|\le M(\tau^2+h^2)$, $M>0$ – не завис. от τ и h

⇒ $\|z^{n+1}\|_{L_2}\le M_1(\tau^2+h^2)$, где $M_1=TM$ – не завис. от τ и h

⇒ устремив $\tau\to0$ и $h\to0$ ⇒

⇒ $\|y^{n+1}-u^{n+1}\|\to0$ сходимость со вторым пор. по τ и по h в L_2
(втор. пор. точности как по врем., так и по простр. пер.)

Здесь сх-ть среднеквадратичная (слабее, чем поточечная)

Т.о., симм. РС — абс. сх-ся РС со вторым пор. точн. по τ и h.

Если рассм. РС: $y_0^{n+1}=y_N^{n+1}=0$ ⇒ получим оценку

(13) $\|y^{n+1}\|_{L_2(\omega_h)}\le\|u_0\|_{L_2(\omega_h)}+\tau\sum_{j=0}^{n}\|\varphi^j\|_{L_2(\omega_h)}$

эта оценка означает абс. устойч-ть симм. РС по нач. усл. и прав. ч.

4° Разностная схема с весами.
Вывод погрешности аппроксимации на решении.

Задача:

(1) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(x,t)$ $0<x<1$, $0<t\le T$

(2) $u(0,t)=\mu_1(t)$, $u(1,t)=\mu_2(t)$, $0\le t\le T$

(3) $u(x,0)=u_0(x)$, $0\le x\le1$

Поставим в соотв-е зад. (1)-(3) однопарам. сем-во РС вида

(4) $\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\sigma y^{n+1}_{\bar xx,i}+(1-\sigma)y^n_{\bar xx,i}+\varphi_i^n$; $(x_i,t_n)\in\omega_{\tau h}$

(5) $y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1})$; $y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1})$, $t_{n+1}\in\overline{\omega_\tau}$

(6) $y_i^0=u_0(x_i)$, $x_i\in\overline{\omega_h}$

/* $\sigma\in R$, $0\le\sigma\le1$ */

обозн. $z_i^n=y_i^n-u_i^n$ — погреш-ть

если σ=0 — чисто неявн. разн. сх. σ=0,5 – то, что мы только что исследовали

⇒ (7) $\frac{z_i^{n+1}-z_i^n}{\tau}=\sigma z^{n+1}_{\bar xx,i}+(1-\sigma)z^n_{\bar xx}+\psi_i^n$,
где ψ_i^n — погр-ть аппр. на решении:

(8) $\psi_i^n=\sigma u^{n+1}_{\bar xx,i}+(1-\sigma)u^n_{\bar xx,i}-\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+\varphi_i^n$

∃ ф-ция и обладает дост. гладкостью (∃-е 6-ых произв. по x и 3-их по t)

Оценим погр. аппроксимации.

Будем расп. по ф-ле Тейлора в узле $(x_i,t_{n+\frac12})$

$u_{i+1}=u_i+hu_i'+\frac{h^2}{2}u_i''+\frac{h^3}{6}u_i'''+\frac{h^4}{24}u_i^{IV}+\dots$ Обозн: $\dot u=\frac{\partial u}{\partial t}$, $u'=\frac{\partial u}{\partial x}$

$u_{i-1}=u_i-hu_i'+\frac{h^2}{2}u_i''-\frac{h^3}{6}u_i'''+\frac{h^4}{24}u_i^{IV}+\dots$

$u_i^{n+1}=u_i(t_{n+\frac12})+\frac{\tau}{2}\dot u(t_{n+\frac12})+\frac{\tau^2}{8}\ddot u_i(t_{n+\frac12})+\frac{\tau^3}{48}\dddot u_i(t_{n+\frac12})+\dots$

$u_i^n=u_i(t_{n+\frac12})-\frac{\tau}{2}\dot u_i(t_{n+\frac12})+\frac{\tau^2}{8}\ddot u_i(t_{n+\frac12})-\frac{\tau^3}{48}\dddot u(t_{n+\frac12})+\dots$

⇒ $u_{\bar xx,i}=u_i''+\frac{h^2}{12}u_i^{IV}+O(h^4)$

$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}=\dot u(x_i,t_{n+\frac12})+O(\tau^2)$

⇒ {подст. всё в ф-лу (8)}

обозн.е $u=u(x_i,t_{n+\frac12})$

$\psi_i^n=\sigma(u''+\frac{\tau}{2}\dot u''+\frac{h^2}{12}u^{IV})+(1-\sigma)(u''-\frac{\tau}{2}\dot u''+\frac{h^2}{12}u^{IV})-\dot u+\varphi_i^n+O(\tau^2)+O(h^4)$ ⊜

⊜ $(u''-\dot u+\varphi_i^n)+(\sigma-0{,}5)\tau\dot u''+\frac{h^2}{12}u^{IV}+O(\tau^2)+O(h^4)$ ⊜

Восп-ся ур-ем $u''-\dot u=-f$ ⇒
⇒ {дважды продифф. по x} ⇒
⇒ $u^{IV}-\dot u''=-f''$ ⇒ $u^{IV}=\dot u''-f''$

⊜ $\underbrace{(u''-\dot u+f(x_i,t_{n+\frac12}))}_{0}-f(x_i,t_{n+\frac12})+\varphi_i^n+$
$+\left((\sigma-0{,}5)\tau+\frac{h^2}{12}\right)\dot u''+O(\tau^2)+O(h^4)-\frac{h^2}{12}f''(x_i,t_{n+\frac12})$

Выберем φ_i^n: ○ – слаг-е обратились в 0

⇒ $\varphi_i^n=f(x_i,t_{n+\frac12})+\frac{h^2}{12}f''(x_i,t_{n+\frac12})$

1) выберем σ=0,5; $\varphi_i^n=f(x_i,t_{n+\frac12})$ ⇒
⇒ $\psi=O(\tau^2+h^2)$ — погр-ть аппр-ции
⇒ это симметричная РС

2) обнулим этот коэф-т:
⇒ $(\sigma-0{,}5)\tau-\frac{h^2}{12}=0$ ⇒ выберем
$\sigma_*=\frac12-\frac{h^2}{12\tau}$, $\varphi_i^n=f(x_i,t_{n+\frac12})+\frac{h^2}{12}f''(x_i,t_{n+\frac12})$

⇒ $\psi=O(\tau^2+h^4)$ — схема повышенного пор. точности

3) остальные
∀σ; $\varphi_i^n=f(x_i,t_n)=f(x_i,t_{n+1})=\dots$
⇒ $\psi=O(\tau+h^2)$

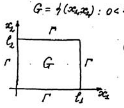
07.04. Лекц. 17.

§2. Разностная схема для уравнения Пуассона (зад. Дирихле).

Пост. зад.:

(1) $\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}=f(x_1,x_2), & (x_1,x_2)\in G\\ u(x_1,x_2)|_\Gamma=\mu(x_1,x_2)\end{cases}$ (2)

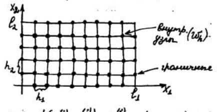
$G=\{(x_1,x_2): 0<x_1<l_1,\ 0<x_2<l_2\}$



$\overline G=G\cup\Gamma$

Надо найти непр. в $\overline G$ ф-цию u, уд. (1)-(2).
Эта зад. имеет ед. реш. при ∀ f и μ.

Вв. сетку с пост. шагом.



$\omega_h=\{(x_1^{(i)},x_2^{(j)}): x_1^{(i)}=i\cdot h_1,\ i=\overline{1,(N_1-1)},\ x_2^{(j)}=j\cdot h_2,\ j=\overline{1,(N_2-1)},$

$\Gamma_h=\{x_{0,j}\}_1^{N_2-1}\cup\{x_{N_1,j}\}_1^{N_2-1}\cup$ | $h_1=\frac{l_1}{N_1}$, $h_2=\frac{l_2}{N_2}\}$

$\cup\{x_{i,0}\}_1^{N_1-1}\cup\{x_{i,N_2}\}_1^{N_1-1}$ ⇒ $\overline{\omega_h}=\omega_h\cup\Gamma_h$ — совок. всех узлов сетки